

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
МІЖНАРОДНИЙ ЕКОНОМІКО-ГУМАНІТАРНИЙ
УНІВЕРСИТЕТ ІМЕНІ АКАДЕМІКА
СТЕПАНА ДЕМ'ЯНЧУКА

Р.М.ЛІТНАРОВИЧ

НАУКОВА ШКОЛА МЕГУ

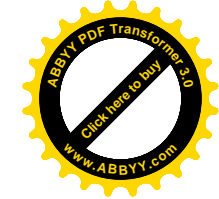
**КОНСТРУЮВАННЯ І ДОСЛІДЖЕННЯ
МАТЕМАТИЧНИХ МОДЕЛЕЙ**

МОНОГРАФІЇ МОЛОДИХ ВЧЕНИХ

КНИГА 27



Рівне, 2010



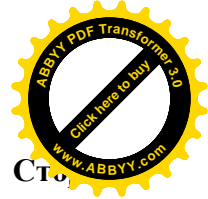
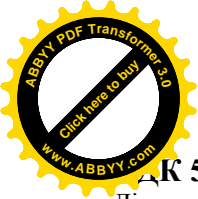
Наукова школа забезпечує переважаючий і проникливий інтелект, здатний до стійкої і довготривалої розумової концентрації. Розвиває живий і діяльний спосіб мислення, дає можливість порівняно легко вирішувати самі складні проблеми. Придає віру в свої сили, розсудливість, витримку, проникливість і дипломатичність. Робота проходить під символом ПОНЯТЛИВОСТІ.

Молоді вчені розглядають існуючі ідеї, роздумують над ними, враховують і застосовують на практиці все те, що було поза увагою. Невдачі не лякають їх, тому що вони знають : Успіх приходить після проробки багатьох конкуруючих варіантів. Вони досягають мети і не піддаються сумнівам. Робота проходить під символом ДОСЯГНЕННЯ.

На основі результатів багаторічного наукового і педагогічного досвіду реалізована концепція автора про статус молодого вченого і наукової школи в цілому.

Представляються наукові праці молодих вчених Природничого факультету МЕГУ, створені у першому семестрі 2010-2011 навчального року на основі базового курсу Фізика з основами геофізики.

Для студентів і аспірантів факультету Кібернетики і Інституту педагогічної освіти МЕГУ, ВНЗ України.



К 51-7:519.87

Літнарів Р.М. Наукова школа МЕНУ. Конструювання і дослідження математичних моделей. Монографії молодих вчених. Книга 27. МЕНУ, Рівне, 2010.-345 с.

Litnarovich R. M. Scientific school IEGU. Constructing and research of mathematical models. Monographs of young scientists. Book 27. IEGU, Rivne, 2010.-345 p.

Рецензенти: В.Г.Бурачек, доктор технічних наук, професор
Є.С. Парняков, доктор технічних наук, професор
В.О.Боровий, доктор технічних наук, професор

Відповідальний за випуск: Й.В. Джуль, доктор фізико-математичних наук,
професор

Дослідження проведені в рамках роботи наукової школи МЕНУ

На основі методу статистичних випробувань МОНТЕ КАРЛО генерують псевдовипадкові числа, які нормуються і приводяться до заданої середньої квадратичної похибки, на основі якої конструюються спотворені моделі.

Спотворені моделі зрівноважуються за способом найменших квадратів. Проводиться оцінка точності зрівноважених елементів. Набирається велика статистика і робляться узагальнюючі висновки. Вперше появляється унікальна нагода порівняти істинні і абсолютні похибки математичних моделей.

Хоча загальні теоретичні положення, приведені в кожній монографії уніфіковані і повторюються, однак всі обчислення кожної математичної моделі строго індивідуальні, що і забезпечує авторство молодого вченого за результатами проведених досліджень.

Для студентів, аспірантів і здобувачів вчених степенів Природничого факультету і факультету Кібернетики МЕНУ.

On the basis of method of statistical tests of MONTE KARLO pseudocausal numbers generate, which are rationed and led to the set middle quadratic error which the distorted is constructed on the basis of models.

The distorted models are counterbalanced on the method of leastsquares. The estimation of exactness of the balanced elements is conducted. Large statistics the and summarizings conclusions are done. Appears first unique case to compare the veritable and absolute errors of mathematical models.

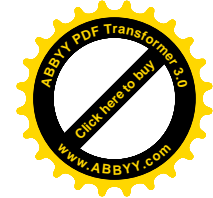
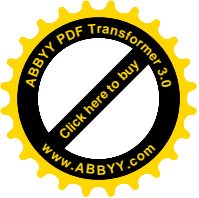
Although theoretical generals, resulted in every monograph compatible and repetitive, however strictly individual all calculations of every mathematical model are, that provides authorship of young scientist as a result of the conducted researches.

For students, graduate students and bread-winners of scientists of degrees of the Natural faculty and to the faculty of Cybernetics IEGU.

ЗМІСТ

1. Літнарів Р.М. Дослідження точності апроксимації залежності магнітного моменту Землі від широти методом статистичних випробувань Монте Карло. Частина 1. МЕНУ, Рівне, 2006,-45 с.....1-45
2. Літнарів Р.М. Встановлення зв'язку між географічною і геомагнітною системами координат. Частина 2..МЕНУ, Рівне, 2006,-47 с.....1-47
3. Гула В.В. Побудова і дослідження математичної моделі залежності магнітного моменту Землі від широти методом статистичних випробувань Монте Карло. Апроксимація поліномом третього степеня. Модель ПГБ10-205. МЕНУ, Рівне, 2010,-62 с.....1-62
4. Корзун Г.П. Побудова і дослідження математичної моделі залежності магнітного моменту Землі від широти методом статистичних випробувань Монте Карло. Апроксимація поліномом третього степеня. Модель ПГБ10-208. МЕНУ, Рівне, 2010,-62 с.....1-62
5. Салей Г.Д. Побудова і дослідження математичної моделі залежності магнітного моменту Землі від широти методом статистичних випробувань Монте Карло. Апроксимація поліномом третього степеня. Модель ПГБ10-212. МЕНУ, Рівне, 2010,-61 с.....1-61
6. Чугай О.М. Побудова і дослідження математичної моделі залежності магнітного моменту Землі від широти методом статистичних випробувань Монте Карло. Апроксимація поліномом третього степеня. Модель ПГБ10-214. МЕНУ, Рівне, 2010,-64 с.....1-64

© Літнарів Р.М.



**МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
МІЖНАРОДНИЙ ЕКОНОМІКО-ГУМАНІТАРНИЙ
УНІВЕРСИТЕТ ім. акад. С. ДЕМ'ЯНЧУКА**

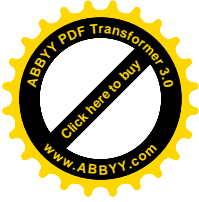
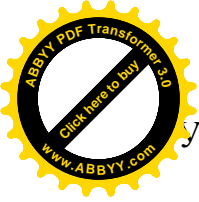
Р. М. Літнарівч

**Дослідження точності апроксимації
залежності магнітного моменту
Землі від широти методом
статистичних випробувань
МОНТЕ КАРЛО**

Частина 1



м. Рівне, 2006



Літнарів Р.М. Дослідження точності апроксимації залежності магнітного моменту Землі від широти методом статистичних випробувань МОНТЕ КАРЛО. Частина 1. МЕНУ, Рівне, 2006, - 45 с.

Рецензенти: В.Г. Бурачек, доктор технічних наук, професор

Є.С. Парняков, доктор технічних наук, професор

В.О. Боровий, доктор технічних наук, професор

Відповідальний за випуск: Й.В. Джунь, доктор фізико-математичних наук, професор

Розроблена методика дослідження точності апроксимації залежності магнітного моменту земної кулі від геомагнітної широти методом статистичних випробувань МОНТЕ КАРЛО.

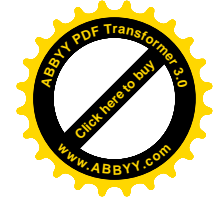
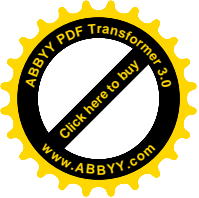
Дослідження проводяться методом найменших квадратів побудовою поліному третьої степені з встановленням ваг і знаходженням середньої квадратичної похибки виведених коефіцієнтів.

Формулюється ряд теорем, які полегшують проведення досліджень.

Для студентів і аспірантів педагогічних факультетів.

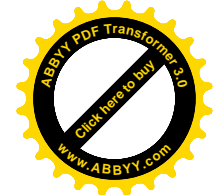
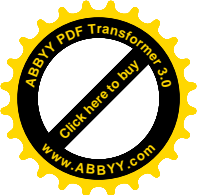
Р.М.Літнарів

© Літнарів Р.М., 2006



ЗМІСТ

Передмова	4
1. Представлення геомагнітного моменту поля Землі	5
2. Генерування істинних похибок для дослідження математичної моделі методом статистичних випробувань МОНТЕ КАРЛО	11
3. Побудова спотвореної моделі	13
4. Представлення системи нормальних рівнянь	17
5. Визначення коефіцієнтів нормальних рівнянь	21
6. Рішення нормальних рівнянь	26
7. Встановлення ключа переходу для зрівноважених коефіцієнтів математичної моделі і їх ваг при зменшених значеннях X і Y	31
Постановка проблеми дослідження	31
Формулювання теорем переходу	31
Розрахунок коефіцієнтів нормальних рівнянь.....	33
Рішення нормальних рівнянь (перша схема Гаусса)	33
Рішення нормальних рівнянь по другій схемі Гаусса	34
Встановлення ключа переходу. Порівняльний аналіз	36
Оцінка точності результатів	39
Висновки	41
Література	43



Передмова

Безумовний науковий і практичний інтерес представляє дослідження геомагнітного поля Землі.

Вивченню природи геомагнітного поля і в наш час приділяється велика увага. Вчені намагаються отримати відповіді на питання: коли і як зародилось магнітне поле земної кулі? Чому воно існує мільярди років? Як це поле буде змінюватися в майбутньому?

В даній роботі ми зробимо спробу виразити один із основних компонентів геомагнітного поля Землі – **магнітний момент** планети графічно і встановить функціональну залежність магнітного моменту від широти.

Нами підбирається емпірична формула у вигляді поліному третього порядку.

Математична модель будується на основі способу найменших квадратів. Побудована ймовірніша модель приймається за істинну модель, на основі якої проводяться дослідження точності методом статистичних випробувань Монте Карло. Генеруються псевдо випадкові числа, які приймаються як істинні похибки, якими спотворюється істинна модель і будується спотворена модель.

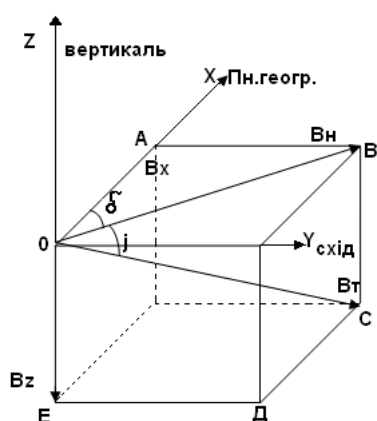
В подальшому методом найменших квадратів зрівноважується спотворена модель і робиться оцінка точності зрівноважених елементів. Знання істинних похибок дає можливість зробити порівняльний аналіз. Набирається велика статистика шляхом побудови і дослідження великої кількості моделей.

Розроблена методика дозволить робити попередній розрахунок точності при проектуванні майбутніх геомагнітних досліджень в будь-якій точці Планети Земля.

1. Представлення геомагнітного моменту поля Землі

Магнітний момент – це векторна величина, яка характеризує земну кулю як джерело магнітного поля. Макроскопічні магнітні моменти створюють замкнуті електричні струми і впорядковано орієнтовані магнітні моменти атомних частинок.

Розрахуємо магнітний момент M Землі на екваторі при $\varphi_{\text{маг.екв.}} = 0$. При цьому спочатку розглянемо елементи земного магнетизму.



Проекції B_z і B_n індукції дипольного поля, або поля однорідного намагнічування Землі, можна знайти за допомогою формул.

Вертикальна складова геомагнітного поля Землі.

$$M$$

$$B_z = \mu_0 \frac{2\pi R^3}{M} \sin \varphi_m,$$

(1.1)

Рис. 1. Елементи земного магнетизму.

Горизонтальна складова

$$\underline{M}$$

$$B_n = \mu_0 \frac{4\pi R^3}{M} \cos \varphi_m, \quad (1.2)$$

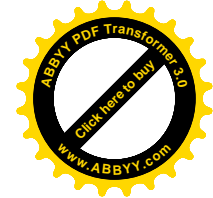
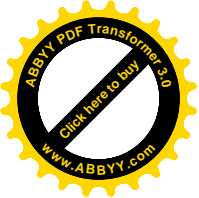
де μ_0 – магнітна стала;

M – магнітний момент земної кулі;

R – радіус Землі;

φ_m – геомагнітна широта, яка відраховується від геомагнітного екватора.

Із приведених формул легко знайти модуль вектора індукції поля однорідного намагнічування земної кулі



$$B_T = \sqrt{B_Z^2 + B_H^2} \quad (1.3)$$

Підставляючи (1.1), (1.2) в (1.3), будемо мати

$$B_T = \sqrt{\mu_0^2 \frac{M^2}{4\pi^2 R^6} (\sin^2 \varphi_M + \frac{\cos^2 \varphi_M}{4})}, \text{ або}$$

$$B_T = \mu_0 \frac{M}{2\pi R^3} \sqrt{\frac{4 \sin^2 \varphi_M + \cos^2 \varphi_M}{4}}.$$

Приймаючи до уваги, що $\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi = 1$, а $4\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi = 3\sin^2 \varphi + \sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi$, отримаємо

$$B_T = \mu_0 \frac{M}{4\pi R^3} \sqrt{3\sin^2 \varphi_M + 1}, \quad (1.4)$$

Знайдемо магнітний момент M із формули (1.4)

$$M = \frac{B_T 4\pi R^3}{\mu_0 \sqrt{3\sin^2 \varphi_M + 1}}. \quad (1.5)$$

Напруженість магнітного поля на магнітному екваторі Некв. = 0,34 ерстеда [3, -с.163].

Для переходу із системи СГСМ у систему СІ складемо слідуючу пропорцію

$$\frac{1}{H_{\text{екв.}}} \frac{a}{M} = \frac{4\pi 10^{-3} \text{ е}}{0,34 \text{ е}},$$

Звідки

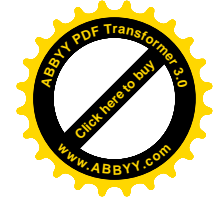
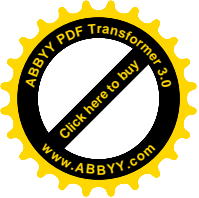
$$H_{\text{екв.}} = \frac{1 a / M \cdot 0,34 \text{ е}}{4\pi 10^{-3} \text{ е}} = 27,05634033 \frac{a}{M}.$$

В загальному випадку напруженість магнітного поля Землі можна розрахувати за формулою

$$H = \frac{B_T}{\mu_0} = \frac{M}{4\pi R^3} \sqrt{3\sin^2 \varphi_M + 1} \quad (1.6)$$

Тоді загальна формула розрахунку магнітного моменту Землі буде

$$4\pi R^3 H$$



$$M = \sqrt{1+3\sin^2\varphi_m} \cdot \frac{4\pi \cdot 10^{-3} e}{H_{\text{пол.}}} \quad (1.7)$$

Для полюса $H_{\text{пол.}} = 0,66$ ерстед. Тоді, при переході до системи СІ

$$\frac{1}{H_{\text{пол.}}} = \frac{4\pi \cdot 10^{-3} e}{0,66 e}$$

звідки

$$H_{\text{пол.}} = \frac{4\pi \cdot 10^{-3} e}{0,66 e} = 52,52113122 \text{ а/м.}$$

Магнітний момент Землі біля полюсів

$$M_{\text{пол.}} = \sqrt{1+3\sin^2 90^\circ} \cdot \frac{H_{\text{пол.}} \cdot 4\pi R^3}{2}$$

Взявши радіус земної кулі $R = 6371000 \text{ м}$, а $4\pi R^3 = 3,249620751 \cdot 10^{21} [\text{м}]^3$, магнітний момент земної кулі на екваторі буде

$$M_{\text{екв.}} = \frac{3,249620751 \cdot 10^{21} [\text{м}]^3 \cdot 27,05634033 [\text{а/м}]}{1} = 8,792284498 \cdot 10^{22} \text{ а} \cdot \text{м}^2.$$

Розрахуємо магнітний момент земної кулі на полюсі

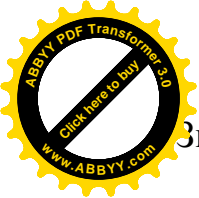
$$M_{\text{пол.}} = \frac{3,249620751 \cdot 10^{21} \cdot 52,52113122}{2} = 8,533687894 \cdot 10^{22} \text{ а} \cdot \text{м}^2.$$

Розрахуємо магнітний момент Землі на широті 45° , прийнявши середнє значення напруженості

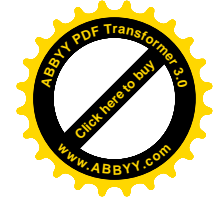
$$H_{45^\circ} = \frac{H_{0^\circ} + H_{90^\circ}}{2} = \frac{0,34 e + 0,66 e}{2} = 0,50 e.$$

Тоді

$$\frac{1}{H_{45^\circ}} = \frac{4\pi \cdot 10^{-3} e}{0,50 e}$$



Звідки



$$H_{45^\circ} = \frac{1 \text{ м} \cdot 0,5e}{4\pi 10^{-3}e} = 39,78873577 \frac{\text{а}}{\text{м}}.$$

Таким чином, магнітний момент H_{45° буде

$$H_{45^\circ} = \frac{3,249620751 \cdot 10^{21} [\text{м}]^3 \cdot 39,78873577 \frac{\text{а}}{\text{м}}}{\sqrt{1+3\sin^2 45^\circ}} = 8,177542602 \cdot 10^{22} \text{а} \cdot \text{м}^2.$$

Знайдемо середню напруженість магнітного поля Землі для широти $22,5^\circ$

$$H_{22,5^\circ} = \frac{0,34e+0,50e}{2} = 0,42e,$$

для $\phi_{\text{маг.}} = 67,5^\circ$

$$H_{67,5^\circ} = \frac{0,50e+0,60e}{2} = 0,58e.$$

І для $\phi_{\text{маг.}} = 22,5^\circ$

$$H_{22,5^\circ} = \frac{1 \text{ м} \cdot 0,42e}{4\pi 10^{-3}e} = 33,422538 \frac{\text{а}}{\text{м}},$$

Звідки

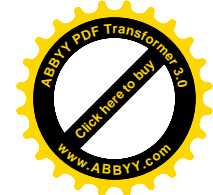
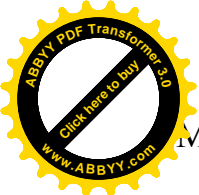
$$H_{22,5^\circ} = \frac{1 \text{ м} \cdot 0,42e}{4\pi 10^{-3}e} = 33,422538 \frac{\text{а}}{\text{м}},$$

і по аналогії

$$H_{67,5^\circ} = \frac{1 \text{ м} \cdot 0,58e}{4\pi 10^{-3}e} = 46,1549335 \frac{\text{а}}{\text{м}}.$$

Магнітні моменти будуть відповідно

$$\frac{3,249620751 \cdot 10^{21} \text{ м}^3 \cdot 33,422538 \frac{\text{а}}{\text{м}}}{}$$



$$M_{22,5^\circ} = \frac{1 + 3\sin^2 22,5^\circ}{\sqrt{1 + 3\sin^2 67,5^\circ}} \cdot 9,052956514 \cdot 10^{22} \frac{\text{a}}{\text{м}} \cdot 3,249620751 \cdot 10^{21} \frac{\text{м}^3}{\text{м}} \cdot 46,1549335 = 7,948506716 \cdot 10^{22} \frac{\text{a}}{\text{м}^2}$$

$$= 7,948506716 \cdot 10^{22} \frac{\text{a}}{\text{м}^2}$$

Результати залежності геомагнітного моменту Землі від широти точки спостереження зведемо в табл.1.

Таблиця 1. залежність геомагнітного моменту Землі від широти точки

№ п/п	$\varphi_{\text{маг.}} = x$ (градуси)	$Y=M=f(x)$ (а/м)	Δ
1	0,00	$8,79 \cdot 10^{22}$	+0,11
2	11,25	$8,90 \cdot 10^{22}$	+0,15
3	22,50	$9,05 \cdot 10^{22}$	-0,45
4	33,75	$8,50 \cdot 10^{22}$	-0,32
5	45,00	$8,18 \cdot 10^{22}$	-0,18
6	56,25	$8,00 \cdot 10^{22}$	-0,05
7	67,50	$7,59 \cdot 10^{22}$	+0,17
8	78,75	$8,12 \cdot 10^{22}$	+0,41
9	90,00	$8,53 \cdot 10^{22}$	
n=9		$\sum 76,02 \cdot 10^{22}$	

спостереження

Згідно формули (1.7) магнітний момент залежить від напруженості магнітного поля і широти точки спостереження, тобто є функцією двох незалежних змінних, хоча в свою чергу напруженість геомагнітного поля, також залежить від широти.

На жаль, у нас немає формули залежності напруженості магнітного поля від широти, що не потребувало б знання магнітного моменту і навпаки.

Тому, безперечний інтерес представляє встановлення функціональної залежності магнітного моменту як головного компонента для визначення складових геомагнітного поля Землі від геомагнітної широти.

Маючи вузлові точки значень геомагнітного моменту Землі в магнітних широтах 0° , $22,5^\circ$, 45° , $67,5^\circ$ і 90° , побудуємо точкову діаграму і графік, представлений на рис. 1. Як видно із графіка, кращою функцією для апроксимації буде

кубічний поліном, тобто

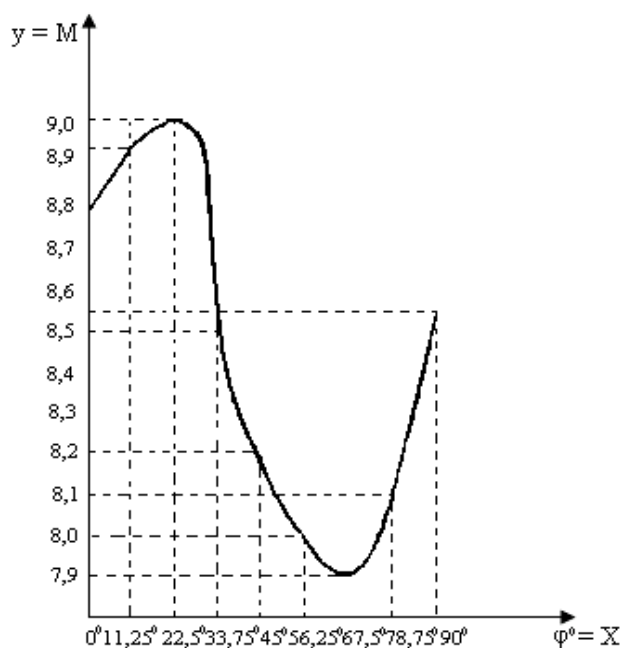


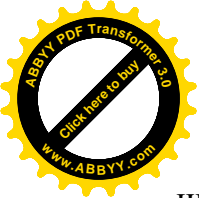
Рис.1 Графік залежності магнітного моменту земної кулі від геомагнітної широти

будемо шукати функціональну залежність у вигляді функції вид у

$$y = ax^3 + vx^2 + cx + d. \quad (1.8)$$

Невідомі коефіцієнти a , v , c , d визначимо по способу найменших квадратів.

Проміжні точки в $11,5^\circ$; $33,75^\circ$; $56,25^\circ$ і $78,75^\circ$ визначимо безпосередньо із графіка. Цього нам буде цілком достатньо для побудови ймовірнішої моделі. побудовану таким чином ймовірнішу модель залежності кулі від широти в подальшому приймемо за істинну модель, і генеруючи істинні похибки будемо створювати спотворені моделі, на яких можна дослідити точність



визначення магнітного моменту в залежності від похибки визначення широти.

2. Генерування істинних похибок для дослідження математичної моделі методом статистичних випробувань МОНТЕ КАРЛО

Приведемо програму генерування випадкових чисел на мові BASIC

Програма №1. Генерування випадкових чисел на BASIC

```
10 PRINT «Генератор випадкових чисел в діапазоні від -M до +M»
20 INPUT «Введіть середню квадратичну похибку вимірів і їх число», M; N
30 DIM Z(N)
40 X = -M; Y = +M; PRINT "M="; M : PRINT "N="; N
50 FOR I = 1 TO N
60 Z(I) = ((Y-X)*RND(I) + X)
70 PRINT USING "Z" (# # .) = # # # . # # ; I; Z(I)
80 NEXT I
90 END
```

Таблиця 2. Істинні похибки при M=1

	01	02	03	04	05	06	07	08	09	10
00	+0,43	+0,37	-0,04	+1,00	+0,29	-0,74	-0,26	+0,17	-0,73	+0,87
10	-0,56	-0,38	-0,53	+0,79	+0,17	-0,08	-0,99	+0,65	-0,95	-0,25
20	+0,01	+0,10	+0,77	-0,28	+0,64	+0,75	-0,17	+0,42	-1,00	+0,20
30	-0,04	+0,53	-0,81	+0,09	+0,76	+0,65	-0,64	+0,06	-0,65	-0,60

Для знаходження середніх квадратичних похибок з точністю 0,1 необхідно дані табл.2 помножити на 0,1, тобто перенести кому на один знак вліво. При генеруванні похибок з точністю 0,05 необхідно дані табл.1 помножити на 0.05.

Заслугує уваги генерування псевдо випадкових чисел, роз приділених за нормальним законом

$$P(X) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} \quad (2.1)$$

Значення $\Delta_{2i-1}, \Delta_{2i}$ генеруються із ζ_i ($i=1,2,3\dots$) за формулами

$$\Delta 2_{i-1} = (-2 \ln \zeta_i)^{1/2} \cos(e^9 \zeta_i), \quad (2.2)$$

$$\Delta 2_i = (-2 \ln \zeta_i)^{1/2} \sin(e^9 \zeta_i). \quad (2.3)$$

Значення ζ_i виробляються за допомогою лінійного методу

$$\zeta_{i+1} = F(11 \zeta_i + \pi), \quad (2.4)$$

де $F(z)$ дробна частина від z .

Проведемо програму генерування псевдо випадкових чисел по даній методиці на програмованому мікрокалькуляторі «Електроніка МК61».

Програма №2. генератор випадкових чисел.

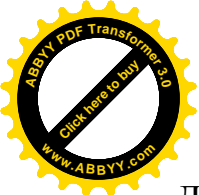
Фпрг	00	01	02	03	04	05	06	07	08	09
00	кпх4	Фπ	пхd	пх4	:	+	к{x}	хпd	9	Fe ⁹
10	х	хпс	Fcos	пхd	Fx ²	FlnX	/-/	F√	хпb	х
20	с/п	пхс	Fsin	пхв	х	с/п	БП	оо	F	АВТ

В регістрах 4 і d зберігаються проміжні результати слідуючих значень Δ_i , тому ці регістри не можна використовувати для других цілей. Перемикач Р/Г встановлюється в положення Р. Розрахунки проводяться в слідуючому порядку:

$$0,011 \text{ хп4} \quad 0,3 \text{ хпd} \quad \text{В/О} \quad \text{с/п} \quad - 0,5816 \text{с/п} \quad 1.1933 \dots$$

Таблиця №3. Псевдо випадкові числа для дослідження спотвореної моделі

	01	02	03	04	05	06	07	08	09
00	-0,58	+1,19	-0,16	+0,23	+0,20	+1,19	+0,89	+0,64	-0,75
10	-1,09	-1,59	+0,11	+0,09	-0,91	-1,61	-1,67	+0,30	-0,69
20	+0,35	+0,30	-1,53	+0,93	-0,23	+0,19	-0,12	-0,54	-0,19



Дані значення пропорційно зменшуються або збільшуються в залежності від точності, яку ми беремо за основу при побудові даної конкретної математичної моделі, попередньо визначивши середню квадратичну похибку для даного конкретного числа похибок.

Методика пропорційного розрахунку псевдо випадкових чисел буде приведена нижче.

3.Побудова спотвореної моделі

Побудувавши ймовірнішу модель по способу найменших квадратів, приймаємо її за істинну модель, адже у неї задовольняються всі умовні рівняння з одного боку, і встановлений функціональний зв'язок між параметрами X і Y – з другого.

В залежності від мети досліджень, задаємося нормативним значенням середньої квадратичної похибки визначення геомагнітної широти X_{Φ} , генеруємо випадкові числа, які б в цілому відповідали нормативній точності, і спотворюємо істинну модель цими похибками.

Зрівноваживши спотворену модель, отримуємо математичну модель, робимо оцінку точності елементів зрівноваженої моделі і встановлюємо відповідність похибок визначення магнітного моменту земної кулі.

Непарні моделі будуть генерувати істинну похибку $0,05^{\circ}$, а парні $0,1^{\circ}$.

Сучасні калькулятори мають «вшиті» генератори для генерування випадкових чисел від 0 до 1. але вони генерують числа тільки зі знаком «плюс». Приведемо методику розрахунку випадкових чисел, які приймемо в подальшому як істинні похибки для побудови спотвореної моделі.

1. Отримавши ряд випадкових (а точніше псевдо випадкових) чисел натиском клавіш К, С4, розраховують середнє арифметичне генерованих псевдо випадкових чисел $\xi_{\text{ср}}$

$$\xi_{\text{ср}} = \frac{\sum_{i=1}^n \xi_i}{n}, \quad (3.1)$$

де n – число випадкових чисел.

2. Розраховуються попередні значення похибок Δ_i за формулою

$$\Delta_i' = \xi_i - \xi_{\text{ср}}. \quad (3.2)$$

3. Знаходиться середня квадратична похибка попередніх істинних похибок за формулою Гаусса

$$m' \Delta_i = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n \Delta_i'^2}{n}}. \quad (3.3)$$

4. Вичисляють коефіцієнт пропорційності K для визначення істинних похибок необхідної точності

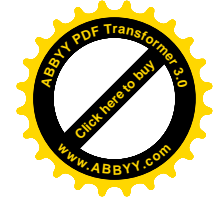
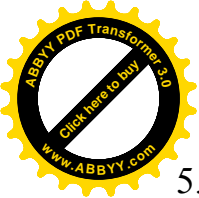
$$K = \frac{C}{m' \Delta_i}, \quad (3.4)$$

де C – необхідна нормована константа.

Так, наприклад, при $m' \Delta_i = 0,283$ і необхідності побудови математичної моделі з точністю $C = 0,1$, будемо мати

$$K_{0,1} = \frac{0,1}{0,283} = 0,353,$$

а при $C = 0,05$, отримаємо $K_{0,05} = 0,177$.



5. Істинні похибки розраховуються за формулою

$$\Delta_i = \Delta_i' \cdot K \quad (3.5)$$

6. Заключним контролем служить розрахунок середньої квадратичної похибки $m\Delta$ генерованих істинних похибок Δ

$$m\Delta = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n \Delta^2}{n}}, \quad (3.6)$$

і порівняння

$$m\Delta = C.$$

Таблиця №4. Генерування псевдо випадкових чисел і розрахунок істинних похибок.

№ п/п	ξ_i	$-\xi_{cp.}$	Δ_i'	$\Delta_i'^2$	$\Delta_{i0,1}=0,353\Delta_i'$	$\Delta_{i^20,1}$	$\Delta_{i0,05}=0,177\Delta_i'$	$\Delta_{i^20,05}$
1	0,40	-0,53	-0,13	0,0169	-0,05	0,0025	-0,02	0,0004
2	0,87	-0,53	+0,34	0,1156	+0,12	0,0144	+0,06	0,0036
3	0,50	-0,53	-0,03	0,0009	-0,01	0,0001	-0,01	0,0001
4	0,17	-0,53	-0,36	0,1296	-0,13	0,0169	-0,06	0,0036
5	0,40	-0,53	-0,13	0,0169	-0,05	0,0025	-0,02	0,0004
6	0,91	-0,53	+0,38	0,1444	+0,13	0,0169	+0,06	0,0036
7	0,73	-0,53	+0,20	0,04	+0,07	0,0049	+0,03	0,0009
8	0,69	-0,53	+0,16	0,0256	+0,06	0,0036	+0,03	0,0009
9	0,14	-0,53	-0,39	0,1521	-0,14	0,0196	-0,07	0,0049
n=9	$\sum 4,81$	-4,77	+0,04	0,642	0	0,0814	0	0,0184

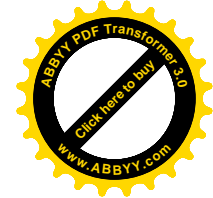
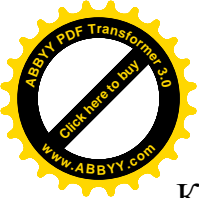
Середнє арифметичне генерованих випадкових чисел

$$\xi_{cp.} = \frac{\sum_{i=1}^9 \xi_i}{9} = \frac{4,81}{9} = 0,5344 \approx 0,53.$$

-15-

Середня квадратична похибка попередніх істинних похибок

$$m\Delta'_i = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^9 \Delta_i'^2}{n-1}} = \sqrt{\frac{0,642}{8}} = 0,283.$$



Коефіцієнт пропорційності

$$K = \frac{C}{m\Delta'i} = \frac{0,1}{0,283} = 0,353.$$

при генеруванні випадкових похибок з точністю 0,1 і $K=0,05/0,283 = 0,177$ при генеруванні похибок з точністю 0,05. Розраховуються істинні похибки $\Delta i_{0,1}=0,353\Delta'i$ і $\Delta i_{0,05}=0,177\Delta'i$.

Середня квадратична похибка при генеруванні з точністю 0,1

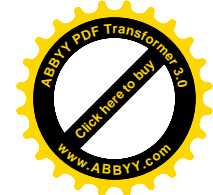
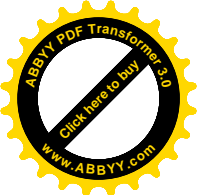
$$m_{\Delta 0,1} = \sqrt{\frac{0,084}{8}} = 0,100.$$

Середня квадратична похибка при генеруванні чисел з точністю 0,05

$$m_{\Delta 0,05} = \sqrt{\frac{0,0184}{8}} = 0,0479 \approx 0,05.$$

Таблиця №5. Побудова спотвореної моделі при $\Delta=0,1$ і $\Delta=0,05$

№п/п	$\phi i = x_i$ істинна	$y' = M = f(x)$ модель	модель при $\Delta\phi = 0,1^\circ$	$\Delta = 0,1M$	модель при $\Delta\phi = 0,05^\circ$	$\Delta = 0,05$ M
1	0,00	8,803	-0,05	-0,05	-0,02	-0,02
2	11,25	8,957	+0,12	11,37	+0,06	11,31
3	22,50	8,851	-0,01	22,49	-0,01	22,49
4	33,75	8,598	-0,13	33,62	-0,06	33,69
5	45,00	8,274	-0,05	44,95	-0,02	44,98
6	56,25	8,011	+0,13	56,38	+0,06	56,31
7	67,50	7,904	+0,07	67,57	+0,03	67,53
8	78,75	8,057	+0,06	78,81	+0,03	78,78
9	90,00	8,575	-0,14	89,86	-0,07	89,93
n=9	$\sum 405,00$	$76,02 \cdot 10^{12}$	0	$\sum 405,00$	0	$\sum 405$



4. Представлення системи нормальних рівнянь

Для визначеності положимо, що маємо ряд результатів залежності геомагнітного моменту земної кулі $Y=M$ від широти $X=\varphi$, виражених в числовій формі, функціональну залежність між якими нам необхідно виразити за допомогою полінома степені K , де коефіцієнти a_i являються не відомими.

Тоді система початкових рівнянь (система рівнянь похибок) може бути записана у вигляді

$$\begin{aligned} a_1 X_1^k + a_2 X_1^{k-1} + a_3 X_1^{k-2} + \dots + a_k X_1 + a_{k+1} X_1^0 - y_1 &= V_1, \\ a_1 X_2^k + a_2 X_2^{k-1} + a_3 X_2^{k-2} + \dots + a_k X_2 + a_{k+1} X_2^0 - y_2 &= V_2, \\ \dots & \\ a_1 X_k^k + a_2 X_k^{k-1} + a_3 X_k^{k-2} + \dots + a_k X_k + a_{k+1} X_k^0 - y_k &= V_k, \\ a_1 X_{k+1}^k + a_2 X_{k+1}^{k-1} + a_3 X_{k+1}^{k-2} + \dots + a_k X_{k+1} + a_{k+1} X_{k+1}^0 - y_{k+1} &= V_{k+1}, \\ \dots & \\ a_1 X_n^k + a_2 X_n^{k-1} + a_3 X_n^{k-2} + \dots + a_k X_n + a_{k+1} X_n^0 - y_n &= V_n. \end{aligned} \quad (4.1)$$

Помноживши кожен рядок цієї системи відповідно на $X_1^k, X_2^k, \dots, X_n^k$ і склавши їх між собою, отримаємо

$$a_1 [X^k X^k] + a_2 [X^{k-1} X^k] + a_3 [X^{k-2} X^k] + \dots + a_k [X X^k] + a_{k+1} [X^0 X^k] - [y X^k] = [v X^k]; \quad (4.2)$$

де символом $[]$ позначені суми (за Гауссом).

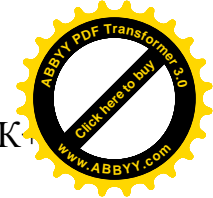
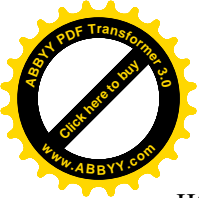
Після помножимо кожен рядок системи (4.1) на $X_1^{k-1}, X_2^{k-1}, \dots, X_n^{k-1}$.

Додавши, будемо мати

$$a_1 [X^k X^{k-1}] + a_2 [X^{k-1} X^{k-1}] + a_3 [X^{k-2} X^{k-1}] + \dots + a_k [X X^{k-1}] + a_{k+1} [X^0 X^{k-1}] - [y X^{k-1}] = [v X^{k-1}]. \quad (4.3)$$

Продовжуючи і далі такі перетворення за допомогою послідовного множення рядків (4.1) відповідно на $X_1^{k-2}, X_1^{k-3}, \dots, X_1^0$ і їх додавання отримаємо ще $K-1$

аналогічних рівнянь.



В результаті будемо мати систему із $K+1$ перетворених рівнянь з K невідомими.

$$\begin{aligned} a_1[x^k x^k] + a_2[x^{k-1} x^k] + \dots + a_{k+1}[x^0 x^k] - [y x^k] &= [v x^k]; \\ a_1[x^k x^{k-1}] + a_2[x^{k-1} x^{k-1}] + \dots + a_{k+1}[x^0 x^{k-1}] - [y x^{k-1}] &= [v x^{k-1}]; \\ \dots &\dots \dots (4.4) \\ a_1[x^k x^0] + a_2[x^{k-1} x^0] + \dots + a_{k+1}[x^0 x^0] - [y x^0] &= [v x^0]; \end{aligned}$$

Розглядаючи цю систему, бачимо, що якщо прирівняти нулю ліві частини складаючих її рівнянь, то вона буде повністю співпадати із системою нормальних рівнянь, відрізняючись від неї тільки послідовністю строчок і членів в строчках.

Докажемо, що дійсно

$$[V X^k] = [V X^{k-1}] = \dots = [V X^0] = 0. \quad (4.5)$$

Для цього помножимо кожен строчку (4.1) відповідно на V_1, V_2, \dots, V_n і результат просумуємо

$$a_1[x^k v] + a_2[x^{k-1} v] + \dots + a_{k+1}[x^0 v] - [y v] = [v v] \quad (4.6)$$

Із умови способу найменших квадратів

$$[V V] = \min, \quad (4.7)$$

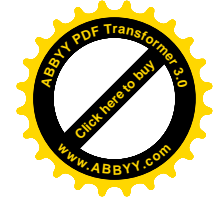
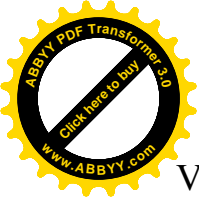
положеного в основу визначення невідомих коефіцієнтів, слідує рівність нулю суми частинних похідних (4.7) по невідомим коефіцієнтам

$$\frac{\partial [v^2]}{\partial a_i} = 2 [V \cdot \frac{\partial v}{\partial a}] = 0 \quad (4.8)$$

В розгорнутому вигляді після скорочення на 2 це можна записати так

$$\begin{aligned} V_1 \cdot \frac{\partial V_1}{\partial a_1} + V_2 \cdot \frac{\partial V_2}{\partial a_1} + \dots + V_n \cdot \frac{\partial V_n}{\partial a_1} &= 0, \\ V_1 \cdot \frac{\partial V_1}{\partial a_2} + V_2 \cdot \frac{\partial V_2}{\partial a_2} + \dots + V_n \cdot \frac{\partial V_n}{\partial a_2} &= 0, \end{aligned} \quad (4.9)$$

.....



$$V_1 \cdot \frac{\partial V_1}{\partial a_{k+1}} + V_2 \cdot \frac{\partial V_2}{\partial a_{k+1}} + \dots + V_n \cdot \frac{\partial V_n}{\partial a_{k+1}} = 0.$$

Це і є система нормальних рівнянь, витікаючи із (4.6).

Але із (4.1) слідує

$$\begin{aligned} \frac{\partial V_1}{\partial a_1} &= X_1^k; & \frac{\partial V_2}{\partial a_1} &= X_2^k, \dots, & \frac{\partial V_n}{\partial a_1} &= X_n^k, \\ \frac{\partial V_1}{\partial a_2} &= X_1^{k-1}; & \frac{\partial V_2}{\partial a_2} &= X_2^{k-1}, \dots, & \frac{\partial V_n}{\partial a_2} &= X_n^{k-1}, \\ &\dots\dots\dots & & & & \\ \frac{\partial V_1}{\partial a_{k+1}} &= X_1^0; & \frac{\partial V_2}{\partial a_{k+1}} &= X_2^0, \dots, & \frac{\partial V_n}{\partial a_{k+1}} &= X_n^0. \end{aligned} \quad (4.10)$$

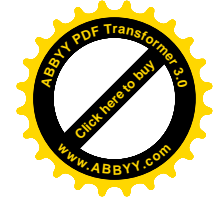
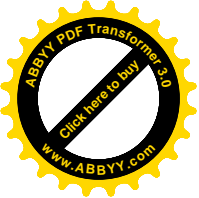
Підставляючи ці значення в (4.9), будемо мати

$$\begin{aligned} [VX^k] &= 0, \\ [VX^{k-1}] &= 0, \\ &\dots\dots\dots \\ [VX^0] &= 0. \end{aligned} \quad (4.11)$$

Таким чином, система нормальних рівнянь буде мати вигляд

$$\begin{aligned} a_1[x^k x^k] + a_2[x^{k-1} x^k] + \dots + a_{k+1}[x^0 x^k] - [y x^k] &= 0 \\ a_1[x^k x^{k-1}] + a_2[x^{k-1} x^{k-1}] + \dots + a_{k+1}[x^0 x^{k-1}] - [y x^{k-1}] &= 0; \\ &\dots\dots\dots \\ a_1[x^k x^0] + a_2[x^{k-1} x^0] + \dots + a_{k+1}[x^0 x^0] - [y x^0] &= 0; \end{aligned} \quad (4.12)$$

Для поліному виду (1.1) система нормальних рівнянь буде



$$\begin{aligned}dn + c[x] + b[x^2] + a[x^3] - [y] &= 0; \\d[x] + c[x^2] + b[x^3] + a[x^4] - [xy] &= 0; \\d[x^2] + c[x^3] + b[x^4] + a[x^5] - [x^2y] &= 0; \\d[x^3] + c[x^4] + b[x^5] + a[x^6] - [x^3y] &= 0.\end{aligned}\tag{4.13}$$

При проведенні досліджень нам буде необхідно представити систему (4.13) у вигляді

-19-

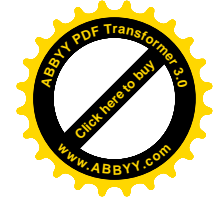
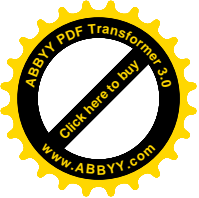
$$\begin{aligned}a[x^6] + b[x^5] + c[x^4] + d[x^3] - [x^3y] &= 0; \\a[x^5] + b[x^4] + c[x^3] + d[x^2] - [x^2y] &= 0; \\a[x^4] + b[x^3] + c[x^2] + d[x] - [xy] &= 0; \\a[x^3] + b[x^2] + c[x] + dn - [y] &= 0.\end{aligned}\tag{4.14}$$

В подальшому будемо рішати систему лінійних нормальних рівнянь (4.13) і (4.14) одним із відомих в математиці способів.

В даній роботі ми будемо рішати систему нормальних рівнянь по системі Гаусса послідовного виключення невідомих і як контрольне рішення буде виконано на мікроЕОМ по розробленій автором програмі.

На основі проведених розрахунків сформуємо систему нормальних рівнянь, загальний вигляд яких буде

$$\begin{aligned}na_0 + a_1[x] + a_2[x^2] + \dots + a_m[x^m] - [y] &= 0, \\a_0[x] + a_1[x^2] + a_2[x^3] + \dots + a_m[x^{m+1}] - [xy] &= 0, \\a_0[x^2] + a_1[x^3] + a_2[x^4] + \dots + a_m[x^{m+2}] - [x^2y] &= 0, \\&\dots \dots \dots \tag{4.15} \\a_0[x^m] + a_1[x^{m+1}] + a_2[x^{m+2}] + \dots + a_m[x^{2m}] - [x^m y] &= 0.\end{aligned}$$



5.Визначення коефіцієнтів нормальних рівнянь

Для того, щоб не було великих значень коефіцієнтів зменшимо значення X і Y в 100 раз, відповідно в 100 раз зменшимо значення вільних членів.

Таблиця 6. Обчислювальна таблиця коефіцієнтів нормальних рівнянь

№ п/п	X	Y	X°	X ²	X ³	S	X ³ X ³	X ³ X ²	X ³ X
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	0,000	0,0879	0,01	0	0	-0,0779	0	0	0
2	0,1125	0,0890	0,01	$1,265625 \cdot 10^{-2}$	$1,423828 \cdot 10^{-2}$	$4,758008 \cdot 10^{-2}$	$2,0272864 \cdot 10^{-4}$	$1,8020324 \cdot 10^{-5}$	$1,6018066 \cdot 10^{-4}$
3	0,225	0,0905	0,01	$5,0625 \cdot 10^{-2}$	$1,1390625 \cdot 10^{-2}$	$2,0651563 \cdot 10^{-1}$	$1,2974633 \cdot 10^{-4}$	$5,7665039 \cdot 10^{-4}$	$2,5628906 \cdot 10^{-3}$
4	0,3375	0,0850	0,01	$1,1390625 \cdot 10^{-1}$	$3,8443359 \cdot 10^{-2}$	$4,1484961 \cdot 10^{-1}$	$4,3789388 \cdot 10^{-3}$	$4,3789388 \cdot 10^{-3}$	$1,2974634 \cdot 10^{-2}$
5	0,45	0,0818	0,01	$2,025 \cdot 10^{-1}$	$9,1125 \cdot 10^{-2}$	$6,71825 \cdot 10^{-1}$	$8,3037656 \cdot 10^{-3}$	$1,8452813 \cdot 10^{-2}$	$4,100625 \cdot 10^{-2}$
6	0,5625	0,0800	0,01	$3,1640625 \cdot 10^{-1}$	$1,7797852 \cdot 10^{-1}$	$9,868848 \cdot 10^{-1}$	$3,1676353 \cdot 10^{-2}$	$5,6313516 \cdot 10^{-2}$	$1,0011292 \cdot 10^{-1}$
7	0,6750	0,0795	0,01	$4,55625 \cdot 10^{-1}$	$3,0754688 \cdot 10^{-1}$	$1,3686719$	$9,4585083 \cdot 10^{-2}$	$1,4012605 \cdot 10^{-1}$	$2,0759414 \cdot 10^{-1}$
8	0,7875	0,0812	0,01	$6,2015625 \cdot 10^{-1}$	$4,8837305 \cdot 10^{-1}$	$1,8248293$	$2,3850824 \cdot 10^{-1}$	$3,028676 \cdot 10^{-1}$	$3,8459378 \cdot 10^{-1}$
9	0,900	0,0853	0,01	0,81	0,729	2,3637	$5,31441 \cdot 10^{-1}$	$5,9049 \cdot 10^{-1}$	0,6561
n=9	Σ 4,05	0,7602	0,09	2,5818751	1,8452813	7,8069563	0,90612409	1,1132236	1,4051048

Продовження таблиці 6.

№ п/п	X	Y	X ³ Y	X ³ S	X ² Y	X ² S	XY	XS
1	2	3	11	12	13	14	15	16
1	0,00	0,0879	0	0	0	0	0	0
2	0,1125	0,0890	$1,267207 \cdot 10^{-4}$	$6,7745854 \cdot 10^{-5}$	$1,1264063 \cdot 10^{-3}$	$6,0218538 \cdot 10^{-4}$	$1,00125 \cdot 10^{-2}$	$5,352759 \cdot 10^{-3}$
3	0,225	0,0905	$1,0308516 \cdot 10^{-3}$	$2,352342 \cdot 10^{-3}$	$4,5815625 \cdot 10^{-3}$	$1,0454854 \cdot 10^{-2}$	$2,03625 \cdot 10^{-2}$	$4,6466016 \cdot 10^{-2}$
4	0,3375	0,0850	$3,2676855 \cdot 10^{-3}$	$1,5948212 \cdot 10^{-2}$	$9,6820312 \cdot 10^{-3}$	$4,7253963 \cdot 10^{-2}$	$2,86875 \cdot 10^{-2}$	$1,4001174 \cdot 10^{-1}$
5	0,45	0,0818	$7,454025 \cdot 10^{-3}$	$6,1220053 \cdot 10^{-2}$	$1,65645 \cdot 10^{-2}$	$1,3604456 \cdot 10^{-1}$	$3,681 \cdot 10^{-2}$	$3,023212 \cdot 10^{-1}$
6	0,5625	0,0800	$1,4238282 \cdot 10^{-2}$	$1,756443 \cdot 10^{-1}$	$2,53125 \cdot 10^{-2}$	$3,1225652 \cdot 10^{-1}$	$4,5 \cdot 10^{-2}$	$5,551227 \cdot 10^{-1}$
7	0,6750	0,0795	$2,4449977 \cdot 10^{-2}$	$4,2093077 \cdot 10^{-1}$	$3,6222188 \cdot 10^{-2}$	$6,2360113 \cdot 10^{-1}$	$5,36625 \cdot 10^{-2}$	$9,2385353 \cdot 10^{-1}$
8	0,7875	0,0812	$3,9655892 \cdot 10^{-2}$	$8,911745 \cdot 10^{-1}$	$5,035668 \cdot 10^{-2}$	$1,1316793$	0,063945	1,4370531
9	0,900	0,0853	0,0621837	1,7231373	0,069093	1,914597	0,07677	2,12733
n=9	Σ 4,05	0,7602	0,15240713	3,2904983	0,21293888	4,1764895	0,33525	5,5375111

Коефіцієнти нормальних рівнянь зручно розраховувати за розробленою автором програмою на програмованому мікрокалькуляторі «Електроніка МК61 або 52». Програма вдосконалена у порівнянні з попередньою, представленою в математичній частині досліджень. В даній програмі визначаються параметри S , X^3S , X^2S , XS , чого немає в попередній.

Програма №3. Послідовний розрахунок коефіцієнтів нормальних рівнянь

Фпрг	00	01	02	03	04	05	06	07	08	09
00	хс/п	хпе	ус/п	х/пd	пхе	Fх ²	хп2	с/п	пхе	х
10	хпз	с/п	пх2	+	пхе	+	пхd	-	0	.
20	0	1	+	Хп4	с/п	пх3	Fх ²	с/п	пх3	пх2
30	х	с/п	пхз	пхе	х	с/п	пх3	пхd	х	с/п
40	пзх	пх4	х	с/п	пх2	пхd	х	с/п	пх2	пх4
50	х	с/п	пхе	пхd	х	с/п	пхе	пх4	х	с/п
60	0	БП	00	F	АВТ					

Натиснувши клавіші в/о с/п, набирають значення X_i , натискають клавішу с/п (пуск), набирають значення Y_i і с/п і послідовно зчитують з дисплея через натиск клавіші с/п x^2 , x^3 , s, x^6 , x^5 , x^4 , x^3y , x^3s , x^2y , x^2s , xy , xs .

Після через натиск клавіші с/п вводять нові параметри x , y ... В регістрах пам'яті одного циклу зберігаються слідуючі дані: X в регістрі e, Y в регістрі d, x^2 в регістрі 2, x^3 в регістрі 3, S в регістрі 4.

Параметри S розраховують за формулою

$$S = X - Y + X^2 + X^3 - X^0. \quad (5.1)$$

Якщо коефіцієнт не зменшують, то $X^0 = 1$, при зменшенні коефіцієнтів у 100 раз $X^0 = 0,01$. В програмі проставлена константа 0,01, тому що ми всі коефіцієнти зменшили в 100 раз. Якщо коефіцієнти не зменшують, то в 18 операторі ставлять 1, а в 19, 20 і 21 команду КНОП. При цьому нам необхідно буде зменшити коефіцієнти і вільні члени рівняння в 0,01 там де буде x^0 .

Коли немає необхідності заповнювати таблицю 6, розроблена програма №4 розрахунку коефіцієнтів нормальних рівнянь.

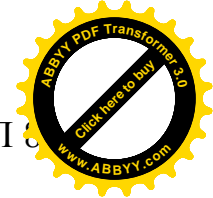
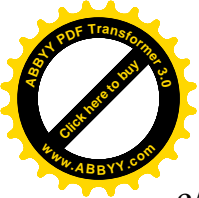
Програма №4. Повний розрахунок коефіцієнтів нормальних рівнянь

Fпрг	00	01	02	03	04	05	06	07	08	09
00	с/п	хп1	с/п	хпо	Fx ²	хп2	Fx ²	хп4	пх2	х
10	пха	+	хпа	пх2	пхо	х	хп3	пх2	х	пх9
20	+	хп9	пхо	пхе	+	хпе	пх2	пх7	+	хп7
30	пх3	пх8	+	хп8	пх1	пх2	х	пхс	+	хпс
40	пх1	пх3	х	пхd	+	хпd	пх1	пх6	+	хп6
50	пх4	пх5	+	хп5	пхо	пх1	х	пхв	+	пхв
60	0	БП	00	пхе	с/п	пх6	с/п	пх7	с/п	пх8
70	с/п	пх5	с/п	пх9	с/п	пха	с/п	пхв	с/п	пхс
80	с/п	пхd	с/п	сх	хп5	хп6	хп7	хп8	хп9	хпа
90	хпв	хпс	хпd	хпе	00 БП	00	F	АВТ		

Після набору Y і с/п, X і с/п йде розрахунок по програмі до індикації 0.

після, через натиск клавіші с/п послідовно вводять значення Y_i , X_i ...

Провівши всі розрахунки, натиском клавіші безумовного переходу БП 62 с/п переходять до зчитування послідовно даних $[x]$, $[y]$, $[x^2]$, $[x^3]$, $[x^4]$, $[x^5]$, $[x^6]$, $[xy]$, $[x^2y]$, $[x^3y]$.



При збої програми потрібно обнулити суматори натиском клавіш БП 8

с/п.

Таблиця 7. Розподіл змінних

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	a	b	c	d	e
x	y	x ²	x ³	x ⁴	Σx ⁴	Σy	Σx ²	Σx ³	Σx ⁵	Σx ⁶	Σxy	Σx ² y	Σx ³ y	Σx

На основі даних табл.6 сформуємо перше нормальне рівняння виду

$$dn + c[x] + b[x^2] + a[x^3] - [y] = 0, \quad (5.1)$$

І в нашому випадку перше контрольне рівняння суми.

$$[x^{\circ}x^{\circ}] + [x^{\circ}x] + [x^{\circ}x^2] + [x^{\circ}x^3] - [x^{\circ}y] = [x^{\circ}s]. \quad (5.2)$$

Для включення даного рівняння в загальну систему нормальних рівнянь необхідно ліву і праву частину даного контрольного рівняння помножити на 0,01 у зв'язку з тим, що всі коефіцієнти ми зменшили в 100 раз, але в першому рівнянні необхідно врахувати квадратичний коефіцієнт $[x^{\circ}x^{\circ}]$

Таким чином на основі розрахункової таблиці 6 маємо перше контрольне рівняння сум

$$0,09 + 4,05 + 2,5818751 + 1,8452813 - 0,7602 = 7,8069564$$

Помноживши всі коефіцієнти на 0,01 отримаємо контрольну суму

$$0,0009 + 0,0405 + 2,5818751 \cdot 10^{-2} + 1,8452813 \cdot 10^{-3} - 0,7602 \cdot 10^{-2} = 7,8069564 \cdot 10^{-2}$$

Коефіцієнти всіх остальных нормальних рівнянь змін не зазнають.

Таким чином, в результаті розрахунку коефіцієнтів нормальних рівнянь ми отримали слідуєчу систему нормальних рівнянь.

$$0,0009d + 0,0405c + 2,5818751 \cdot 10^{-2}b + 1,8452813 \cdot 10^{-2}a - 0,7602 \cdot 10^{-3} = 0,$$

$$0,0405d + 2,5818751c + 1,8452813b + 1,4051048a - 0,33525 = 0,$$

$$0,025818751d + 1,8452813c + 1,4051048b + 1,1132236a - 0,21293888 = 0,$$

$$0,018452813d + 1,4051048c + 1,1132236b + 0,90612409a - 0,15240713 = 0.$$

(5.3)

Сформуємо таблицю коефіцієнтів нормальних рівнянь.

Таблиця 8. Коефіцієнти нормальних рівнянь.

	x^0	x	x^2	x^3	Y	S	Контроль
$[x^0]$	0.0009	0.0405	$2.5818751 \cdot 10^{-2}$	$1.8452813 \cdot 10^{-2}$	$-7.602 \cdot 10^{-3}$	$7.8069564 \cdot 10^{-2}$	$7.8069564 \cdot 10^{-2}$
$[x]$		2.5818751	1.8452813	1.4051048	-0.33525	5.5375111	5.5375112
$[x^2]$			1.4051048	1.1132236	-0.21293888	4.1764895	4.1764897
$[x^3]$				0.90612409	-0.15240713	3.2904983	3.2904981
коэф	8.802838	0.0283700	-0.14403861	0.12189736			
		87					
	d	c	b	a			

Виконання контрольних рівнянь сум

$$[x^0 x^0] + [x^0 x] + [x^0 x^2] + [x^0 x^3] - [x^0 y] = [x^0 s],$$

$$[x^0 x] + [xx] + [xx^2] + [xx^3] - [xy] = [xs],$$

$$[x^0 x^2] + [xx^2] + [x^2 x^2] + [x^2 x^3] - [x^2 y] = [x^2 s], \quad (5.4)$$

$$[x^0 x^3] + [xx^3] + [x^2 x^3] + [x^3 x^3] - [x^3 y] = [x^3 s].$$

І в нашому випадку

$$0,0009 + 0,0405 + 2,5818751 \cdot 10^{-2} + 1,8452813 \cdot 10^{-2} - 7,602 \cdot 10^{-3} = 7,8069564$$

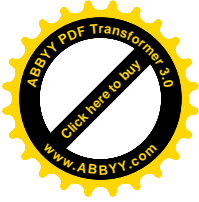
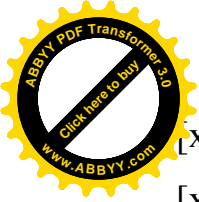
$$0,0405 + 2,5818751 + 1,8452813 + 1,4051048 - 0,33525 = 5,5375112$$

$$2,5818751 \cdot 10^{-2} + 1,8452813 + 1,4051048 + 1,1132236 - 0,21293888 = 4,1764897$$

$$1,8452813 \cdot 10^{-2} + 1,4051048 + 1,1132236 + 0,90612409 - 0,15240713 = 3,2904981$$

В дальнішому приступають до розв'язання системи рівнянь

$$[x^0 x^0]d + [x^0 x]c + [x^0 x^2]b + [x^0 x^3]a - [x^0 y] = 0,$$



$$\begin{aligned}[x^0x]d + [xx]c + [xx^2]b + [xx^3]a - [xy] &= 0, \\ [x^0x^2]d + [xx^2]c + [x^2x^2]b + [x^2x^3]a - [x^2y] &= 0, \\ [x^0x^3]d + [xx^3]c + [x^2x^3]b + [x^3x^3]a - [x^3y] &= 0.\end{aligned}\tag{5.5}$$

Після рішення системи нормальних рівнянь (5.5),

представлених в числовому виді (5.3) отримаємо рівняння

$$y = 0,12189736x^3 - 0,14403861x^2 + 0,028370087x + 8,802838$$

що і являється математичною моделлю залежності магнітного моменту планети Земля від широти пункту спостереження.

Оцінимо якість рішення нормальних рівнянь по схемі Гаусса за формулами заключного контролю (5.5)

$$\begin{aligned}0,0009 \cdot 8,802838 + 0,0405 \cdot 0,028370087 + 2,5818751 \cdot 10^{-2} \cdot \\ (-0,14403861) + 1,8452813 \cdot 10^{-2} \cdot 0,12189736 &= 0,007602; \\ 0,0405 \cdot 8,802838 + 2,581875 \cdot 0,028370087 + 1,8452813 \cdot \\ (-0,14403861) + 1,4051248 \cdot 0,12189736 &= 0,33525; \\ 2,5818751 \cdot 10^{-2} \cdot 8,802838 + 1,8452813 \cdot 0,028370087 + 1,4051048 \cdot \\ (-0,14403861) + 1,1132236 \cdot 0,12189736 &= 0,2129387; \\ 1,8452813 \cdot 10^{-2} \cdot 8,802838 + 1,4051048 \cdot 0,028370087 + 1,1132236 \cdot \\ (-0,14403861) + 0,90612409 \cdot 0,12189736 &= 0,15240703.\end{aligned}$$

Як бачимо, в контрольних рівняннях забезпечується чітко точність в шість значущих цифр після коми, що говорить про коректність і вірність рішення.

6.Рішення нормальних рівнянь

Таблиця 9. Перша схема Гаусса

№ п/п		$x^0 \cdot d$	$x \cdot c$	$x^2 \cdot b$	$x^3 \cdot a$	y	Σ	контроль
1	$[x^0]$	0,0009	0,0405	$2,5818751 \cdot 10^{-2}$	$1,8452813 \cdot 10^{-2}$	$-0,7602 \cdot 10^{-2}$	$7,8069564 \cdot 10^{-2}$	
2		-1	-44,999999	-28,6875	-20,503125	8,4466665	-86,743959	-86,743957
3	$[x]$		2,5818751	1,8452813	1,4051048	-0,33525	5,5375111	
4			-1,8225	-1,1618438	-0,83037656	$3,4208999 \cdot 10^{-1}$	-3,5131303	
5	Σ		0,7593751	0,6834375	0,5747283	$6,83999 \cdot 10^{-3}$	2,0243808	2,0243809
6			-1	-0,89999984	-0,75684372	$-9,0073926 \cdot 10^{-3}$	-2,6658507	-2,6658509
7	$[x^2]$			1,4051048	1,1132236	-0,21293888	4,1764895	
8				-0,74067541	-0,52936507	0,21808238	-2,2396207	
9				-0,61509364	-0,51725538	$-6,1559899 \cdot 10^{-3}$	-1,8219423	
10	Σ		$[x^2 x^2 \cdot 2] =$	$4,933576 \cdot 10^{-2}$	$6,660312 \cdot 10^{-2}$	$-1,0124899 \cdot 10^{-3}$	0,1149265	0,11492639
11				-1	-1,3499968	$2,0522434 \cdot 10^{-2}$	-2,3294766	-2,3294744
12	$[x^3]$				0,90612409	-0,15240713	3,2904983	
13					$-3,7834033 \cdot 10^{-1}$	$1,5586476 \cdot 10^{-1}$	-1,6006701	
14					$-4,349795 \cdot 10^{-1}$	$-5,1768034 \cdot 10^{-3}$	-1,5321398	
15			$[x^3 x^3 \cdot 2] =$	$9,280426 \cdot 10^{-2}$	$-8,9913998 \cdot 10^{-2}$	$1,3668581 \cdot 10^{-3}$	$-1,5515041 \cdot 10^{-1}$	
16	Σ		$[x^3 x^3 \cdot 3] =$	$Pa =$	$2,890262 \cdot 10^{-3}$	$-3,523153 \cdot 10^{-4}$	0,002538	0,0025379467
17					-1	$1,2189736 \cdot 10^{-1}$	-0,87812107	-0,87810
18		8,4466665	$-9,0073926 \cdot 10^{-3}$	$2,0522434 \cdot 10^{-2}$	0,12189736			
19	ax	-20,503125a	-0,75684372a	-1,3499968a	a			
20	bx	-28,6875b	-0,89999984b	-0,14403861				
21	cx	-44,999999	0,028370087	b				
22		8,802838	C					
23		d						

Коефіцієнт $a = +0,12189736$ виписуємо безпосередньо із схеми Гаусса (див.17 строчки).

Коефіцієнт b розраховується на основі даних 11 строчки
 $b = -1,3499968 \cdot 0,12189736 + 0,020522434 = -0,14403861$.

Коефіцієнт c розраховується на основі даних 6 строчки
 $c = -0,89999984 b - 0,75684372a - 9,0073926 \cdot 10^{-3} = +0,0028370087$.

Коефіцієнт d розраховується на основі даних 2 строчки
 $d = -44,999999 c - 28,6875 b - 20,503125a + 8,4466665 = +8,802838$.

Визначені коефіцієнти a, b, c, d виписуються у відповідний стовпчик таблиці коефіцієнтів нормальних рівнянь і виконується заключний контроль по приведеним вище формулам.

По даній схемі Гаусса можна визначити обернені ваги останнього a і передостаннього b коефіцієнтів для розрахунку точності зрівноважених елементів. З метою визначення обернених ваг коефіцієнтів d і c , переставимо строчки системи нормальних рівнянь і члени в строчках так, щоб коефіцієнт d

був на останньому місці, а коефіцієнт s в передостанньому стовпчику першого стовпчиком вільних членів. Другими словами, нам необхідно рішення системи нормальних рівнянь

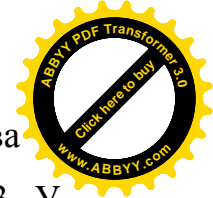
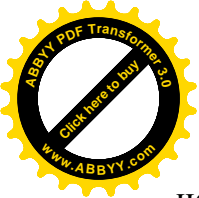
$$\begin{aligned} [x^3x^3]a + [x^2x^3]b + [xx^3]c + [x^0x^3]d - [x^3y] &= 0, \\ [x^2x^3]a + [x^2x^2]b + [xx^2]c + [x^0x^2]d - [x^2y] &= 0, \\ [xx^3]a + [xx^2]b + [xx]c + [x^0x]d - [xy] &= 0, \\ [x^0x^3]a + [x^0x^2]b + [x^0x]c + [x^0x^0]d - [x^0y] &= 0. \end{aligned}$$

Таблиця 10. Коефіцієнти нормальних рівнянь

	$x^3]$	$x^2]$	$x]$	$x^0]$	$Y]$	$S]$	Заключний контроль
$[x^3]$	0,90612409	1,1132236	1,4051048	$1,8452813 \cdot 10^{-2}$	-0,15240713	3,2904983	0,15240713
$[x^2]$		1,4051048	1,8452813	$2,581875 \cdot 10^{-2}$	-0,21293888	4,1764895	0,21293897
$[x]$			2,5818751	0,0405	-0,33525	5,5375111	0,33524999
$[x^0]$				0,0009	-0,007602	$7,8069564 \cdot 10^{-2}$	0,007602
Коеф.	$+1,2185367 \cdot 10^{-1}$	$-1,4397769 \cdot 10^{-1}$	$+2,834832 \cdot 10^{-2}$	+8,802971			
a		b	C	d			

Таблиця 11. Рішення нормальних рівнянь (друга схема Гаусса)

№п/п	$x^3]a$	$x^2]b$	$x]c$	$x^0]d$	y	Σ	контроль
1	$[x^3]$ 0,90612409	1,1132236	1,4051048	$1,8452813 \cdot 10^{-2}$	-0,15240713	3,2904983	
2	-1	-1,2285553	-1,5506759	-	$+1,6819675 \cdot 10^{-1}$	-3,6313991	-3,6313989
3	$[x^2]$	1,4051048	1,8452813	$2,581875 \cdot 10^{-2}$	-2,1293888 $\cdot 10^{-1}$	4,1764895	
4		-1,3676567	-1,726249	-	+0,18724059	-4,0425591	
5		0,0374481	0,1190323	$+3,148449 \cdot 10^{-3}$	-2,569838 $\cdot 10^{-2}$	+0,1339304	+0,13393047
6		-1	-3,1785937	-	+0,68623987	-3,576427	-3,576428
7	$[x]$		2,5818751	0,0405	-0,33525	5,5375111	
8			-2,1788621	-	$+2,3633406 \cdot 10^{-1}$	-5,1024963	
9			-	$-1,000764 \cdot 10^{-2}$	$+8,1684701 \cdot 10^{-2}$	-	
10		$[xx^2]=$	$2,465769 \cdot 10^{-2}$	$1,878029 \cdot 10^{-3}$	$-1,7231239 \cdot 10^{-2}$	$+9,3045 \cdot 10^{-3}$	$+9,3045 \cdot 10^{-3}$
11			-1	-	$+6,9881804 \cdot 10^{-1}$	-	
12	$[x^0]$			0,0009	-0,007602	$7,8069564 \cdot 10^{-2}$	
13				-	$+3,1037031 \cdot 10^{-3}$	-	
14				$3,7578328 \cdot 10^{-1}$	-	$6,7009528 \cdot 10^{-2}$	
15		$[x^0x^0 \cdot 2]=$	$2,595118 \cdot 10^{-1}$	-	$1,3124005 \cdot 10^{-3}$	-	
16		$[x^0x^0 \cdot 3]=$	Pd=	$1,1647263 \cdot 10^{-1}$	$-1,0253052 \cdot 10^{-3}$	-	
17				-1	-8,802971	+7,8034658	+7,803
18	0,16819675	0,68623987	0,69881804	+8,802971			
19	d·	-	-0,076164027d				
20	c·	-1,5506759	-3,1785937c	+0,02834832			
21	b·	-1,2285553	-0,14397769 C				
22	+0,12185367	b					
23	a						



Останній контроль в даній схемі говорить, що похибка можлива четвертій значущій цифрі. Це визвано діленням на число 0,00011647263. У заключних контролях найбільше розходження у сьомій значущій цифрі після коми говорить про цілком надійні і добрі результати.

Невідомі коефіцієнти a , b , c , d розраховуються за слідуючими формулами, які приводяться в позначеннях Гаусса

$$d = \frac{[x^0 y \cdot 3]}{[x^0 x^0 \cdot 3]}, \quad (6.1)$$

$$c = - \frac{[xy \cdot 2]}{[xx \cdot 2]} - \frac{[xx^0 \cdot 2]}{[xx \cdot 2]} \cdot d, \quad (6.2)$$

$$b = - \frac{[x^2 y \cdot 1]}{[x^2 x^2 \cdot 1]} - \frac{[x^2 x^0 \cdot 1]}{[x^2 x^2 \cdot 1]} \cdot d - \frac{[x^2 x^2 \cdot 1]}{[x^2 x^2 \cdot 1]} \cdot c, \quad (6.3)$$

$$a = - \frac{[x^3 y]}{[x^3 x^3]} - \frac{[x^3 x^0]}{[x^3 x^3]} \cdot d - \frac{[x^3 x]}{[x^3 x^3]} \cdot c - \frac{[x^3 x^2]}{[x^3 x^3]} \cdot b. \quad (6.4)$$

При цьому коефіцієнт d виписується безпосередньо із 17 строчки $d = +8,802971$.

Із одинадцятої строчки

$$c = 0,69881804 - 7,6164027 \cdot 10^{-2} \cdot 8,802971 = 0,02834832.$$

Із шостої строчки

$$b = +0,68623987 - 0,084074998 \cdot 8,802971 - 3,1785937 \cdot 0,02834832 = -0,14397703$$

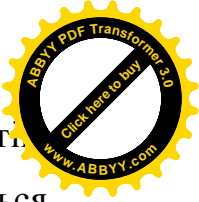
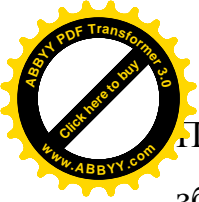
Із другої строчки

$$a = 0,16819675 - 0,020364553 \cdot 8,802971 - 1,5506759 \cdot 0,02834832 - 1,2285553 \cdot (-0,14397769) = 0,16819675$$

Заключний контроль зручно виконувати по програмі №5.

Програма №5. Заключний контроль рішення нормальних рівнянь

Гпрг	00	01	02	03	04	05	06	07	08	09
00	Сх	хпе	с/п	хпо	хпd	0	с/п	кхпо	пхо	1
10	-	Fх=0	06	пхd	хпо	кпхо	с/п	х	пхе	+
20	хпе	пхо	1	-	Fх=0	15	пхе	с/п	Сх	хпе
30	БП	13	F	АВТ						



Після натиску клавіш в/о с/п вводиться число визначених коефіцієнтів збільшених на одиницю $n+1$ і після через натиск клавіші с/п вводяться послідовно визначені коефіцієнти зліва на право а с/п b с/п c с/п d с/п.

Автоматично на дисплеї з'являється визначений коефіцієнт, набирається відповідний коефіцієнт нормального рівняння і натискається клавіша с/п,

наприклад, з'являється 0,2185367, набирається 0,90612409 с/п ... В кінці з'являється контрольне значення 0,15240713.

Таким чином, в результаті рішення другої схеми Гаусса ми отримали другу формулу кубічного полінома

$$y=0,12185367x^3 - 0,14397769x^2 + 0,02834832x + 8,802971. \quad (6.5)$$

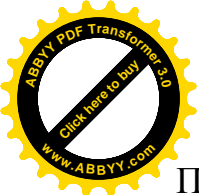
Хоча у цих двох схемах Гаусса ми рішали одну і ту ж систему рівнянь з абсолютно однаковими коефіцієнтами, але поміняними строчками і членами в строчках, із сумісного рішення цих рівнянь ми отримали коефіцієнти, які дещо відрізняються між собою. Але дані коефіцієнти повністю задовольняють ці рівняння і добре задовольняють заключні контролі. Це говорить про те, що ми абсолютно коректно виконали процедуру строгого зрівноваження.

Розходження в коефіцієнтах говорить про наявність в системі істинних залишкових похибок, які не в змозі повністю бути компенсованими процедурою строгого зрівноваження по способу найменших квадратів. Адже зрівноваження по способу найменших квадратів дає лише узгодження умовних рівнянь. Але при цьому ще залишаються істинні похибки, які із сумісного рішення систем рівнянь і дають такі розходження в коефіцієнтах.

В подальшому дані рівняння рішались на мікроЕОМ.

Програма №6. Рішення систем лінійних рівнянь при $n \leq 4$

Fnpr	00	01	02	03	04	05	06	07	08	09
00	хп4	1	4	Хп2	пхо	хп1	с/п	пх4	:	кхп2
10	FL1	06	1	4	хпз	пхо	хп1	FL1	23	кпх3
20	с/п	БП	19	Сх.	кхп2	FL1	24	кхп2	пхо	пх2
30	+	хп1	хп2	Пх3	-	Fх≠0	42	с/п	пп	84
40	БП	28	кпхо	пхо	хпз	с/п	кпх2	-	хп4	с/п
50	кпх2	-	пх4	:	кхп1	FL3	49	пх1	пхо	+
60	хп3	1	4	Хп1	хп2	кпх1	/-/	пп	84	пхз
70	+	хпз	пх1	-	Fх=0	65	пхо	хп1	кпх3	кпх2
80	FL1	78	БП	12	пхо	↔	В↑	кпх3	х	кпх1
90	+	кхп2	FO	FL0	86	FO	хпо	в/о	пхс	с/п
100	пхв	с/п	пха	с/п						



Перед розрахунком по програмі слід ввести число рівнянь в регістр 0, тобто пхпо; після набирають перший коефіцієнт в/о с/п. послідовно набираючи всі коефіцієнти і вільні члени (знаки вільних членів з правої сторони рівності (зі знаком «плюс»)). В кінці розрахунку одержують пхd-к1; пхс-к2; пхb-к3; пха-к4. Результати індикуються на дисплеї через натиск клавіші с/п. в новому рахунку обнулити всі оператори.

В результаті рішення системи нормальних рівнянь (5.3) отримали

$$\text{пхd}=8,8028286; \quad \text{пхс}=+0,028372721;$$

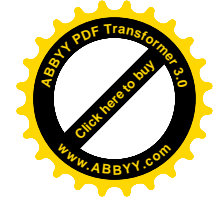
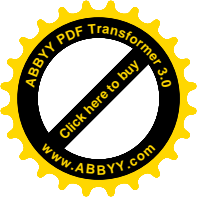
$$\text{пхb}=-0,14404609; \quad \text{пха}=0,12190277$$

тобто

$$y=0,12190277x^3-0,14404609x^2+0,028372721x+8,8028286.$$

При рішенні другої системи рівнянь виду (4.14)

$$\text{пхd}=0,12190915; \quad \text{пхс}=-0,1440566; \quad \text{пхb}=+0,02837784; \quad \text{пха}=8,802769.$$



7. Встановлення ключа переходу для зрівноважених коефіцієнтів математичної моделі і їх ваг при зменшених значеннях X і Y

7.1. Постановка проблеми досліджень.

При оперуванні великими числами X і Y коефіцієнти нормальних рівнянь набувають великих значень, особливо при підведенні їх до шостої, п'ятої степені, а при одночасному опрацюванню їх з коефіцієнтами, вираженими в долях одиниці різко знижується точність результатів. Тому, доцільно перед початком опрацювання матеріалів зменшити значення X і Y у K разів. Таким шляхом ми і пішли, зменшивши значення X і Y у 100 раз. Провівши строге зрівноваження по способу найменших квадратів, і виконавши заключні контролі, ми впевнилися у правильності і коректності виконаної процедури строгого зрівноваження.

Але, на жаль, ми не можемо скористатися цими результатами строгого зрівноваження для знаходження дійсних значень u за дійсними значеннями x по отриманій формулі. Тому, нам необхідно встановити ключ переходу від результатів зрівноваження зі зменшеними параметрами X і Y до їх реальних значень.

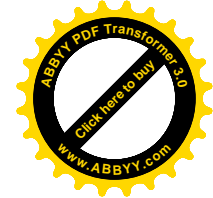
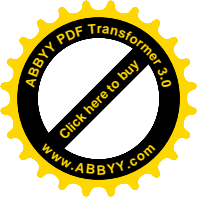
Крім цього встановлений ключ переходу нам дасть можливість проведення широкомасштабних досліджень на спотворених математичних моделях по способу статистичних випробувань Монте Карло.

7.2. Формулювання теорем переходу.

Теорема 1. Якщо в початкових умовних рівняннях зменшити значення вихідних параметрів X і Y в K разів, (у нашому випадку у 100 разів) то, отриманий коефіцієнт a при x^3 із рішення нормальних рівнянь необхідно зменшити в 100^2 разів, тобто при коефіцієнті переходу K

$$a_{1:1} = a_{1:1} K^2 = \frac{a_{1:1}}{K^2}, \quad (7.1)$$

Теорема 2. При даних умовах отриманий коефіцієнт b при x^2 необхідно зменшити в K разів (у нашому випадку в 100 разів)



$$b_{1:1} = \frac{b_{1:k}}{k} \quad (7.2)$$

Теорема 3. При даних умовах, отриманий коефіцієнт c при x залишається без змін, тобто

$$C_{1:1} = C_{1:k} \quad (7.3)$$

Теорема 4. При даних умовах, отриманий коефіцієнт d залишається без змін, тобто

$$d_{1:1} = d_{1:k} \quad (7.4)$$

Теорема 5. При даних умовах вагу P_a необхідно збільшити у $(k^2)^3$ разів, тобто

$$P_{a1:1} = P_{a1:k} (k^2)^3 \quad (7.5)$$

Теорема 6. При даних умовах вагу P_d коефіцієнта d необхідно збільшити у k^2 разів, тобто

$$P_{d1:1} = P_{d1:k} \cdot k^2 \quad (7.6)$$

Теорема 7. При даних умовах коефіцієнт $[xx \cdot 2]$ для визначення ваги P_b необхідно збільшити у (k^2) разів, тобто

$$[xx \cdot 2]_{1:1} = [xx \cdot 2]_{1:k} (k^2) \quad (7.7)$$

Теорема 8. При даних умовах коефіцієнт $[x^\circ x^\circ \cdot 2]$ для визначення ваги P_b слід збільшити у k^2 разів, тобто

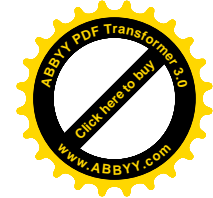
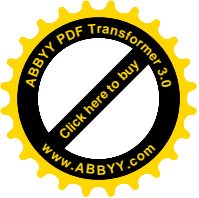
$$[x^\circ x^\circ \cdot 2]_{1:1} = [x^\circ x^\circ \cdot 2]_{1:k} \cdot k^2 \quad (7.8)$$

Теорема 9. При даних умовах коефіцієнт $[x^2 x^2 \cdot 2]$ для визначення ваги P_c необхідно збільшити у $(k^2)^2$ раз, тобто

$$[x^2 x^2 \cdot 2]_{1:1} = [x^2 x^2 \cdot 2]_{1:k} \cdot (k^2)^2 \quad (7.9)$$

Теорема 10. При даних умовах коефіцієнт $[x^3 x^3 \cdot 2]$ для визначення ваги P_c необхідно збільшити у $(k^2)^3$ разів, тобто

$$[x^3 x^3 \cdot 2]_{1:1} = [x^3 x^3 \cdot 2]_{1:k} \cdot (k^2)^3 \quad (7.10)$$



7.3. Розрахунок коефіцієнтів нормальних рівнянь

Для доказу сформульованих теорем знайдемо коефіцієнти нормальних рівнянь при $k=1$, тобто значення параметрів x : y не масштабували.

Таблиця 13. Знаходження коефіцієнтів нормальних рівнянь.

№п/п	$X=\varphi^\circ$	$Y=M \cdot 10^{22}$	x°	x^2	x^3	s	x^3x^3	x^3x^2	x^3x
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	0,00	8,79	1	0	0	-7,79	0	0	0
2	11,25	8,90	1	126,5625	1423,8281	1553,7406	2027286,4	180203,24	16018,066
3	22,50	9,05	1	506,25	11390,625	11910,875	$1,2974633 \cdot 10^8$	5766503,9	256289,06
4	33,75	8,50	1	1139,0625	38443,359	39608,672	$1,4778919 \cdot 10^8$	43789388	1297463,3
5	45,00	8,18	1	2025,00	91125	93187,82	$8,3037656 \cdot 10^8$	$1,8452813 \cdot 10^8$	4100625
6	56,25	8,00	1	3164,0625	177978,52	181191,83	$3,1676353 \cdot 10^9$	$5,6313516 \cdot 10^8$	10011292
7	67,50	7,95	1	4556,25	307546,88	312163,68	$9,4585083 \cdot 10^9$	$1,4012605 \cdot 10^9$	20759414
8	78,75	8,12	1	6201,5625	488373,05	496646,24	$2,3850824 \cdot 10^9$	$3,028676 \cdot 10^9$	38459377
9	90,00	8,53	1	8100	729000	737182,47	$5,31441 \cdot 10^{11}$	$5,9049 \cdot 10^9$	65610000
n=9	405	76,02	9	25818,751	1845281,3	1871437,6	$9,0612411 \cdot 10^{11}$	$1,1132236 \cdot 10^9$	$1,4051048 \cdot 10^8$

Продовження таблиці 13

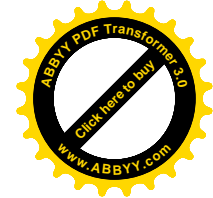
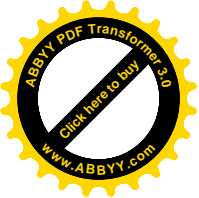
№п/п	$X=\varphi^\circ$	$Y=M \cdot 10^{22}$	x^3y	x^3s	x^2y	x^2s	xy	xs
1	2	3	11	12	13	14	15	16
1	0,00	8,79	0	0	0	0	0	0
2	11,25	8,90	12672,07	2212259,5	1126,4063	196392,16	100,125	17479,581
3	22,50	9,05	103085,16	$1,3567231 \cdot 10^8$	4581,5625	6029095,7	203,625	267994,68
4	33,75	8,50	326768,55	$1,5226904 \cdot 10^8$	9682,0312	45114474,8	286,875	1336792,7
5	45,00	8,18	745402,5	$8,4917401 \cdot 10^8$	16564,5	$1,8870129 \cdot 10^8$	368,1	4193451,9
6	56,25	8,00	1423828,2	$3,22478253 \cdot 10^9$	25312,5	$5,7329594 \cdot 10^8$	450	10192040
7	67,50	7,95	2444997,7	$9,6004965 \cdot 10^9$	36222,188	$1,4222867 \cdot 10^9$	536,625	21071048
8	78,75	8,12	3965589,2	$2,4157189 \cdot 10^{11}$	50356,688	$3,0675672 \cdot 10^9$	639,45	38953391
9	90,00	8,53	6218370	$5,3740602 \cdot 10^{11}$	69093	$5,9711618 \cdot 10^9$	767,7	66346422
n=9	405	76,02	15240713	$9,1738344 \cdot 10^{11}$	212938,88	$1,1274353 \cdot 10^9$	3352,5	$1,4237862 \cdot 10^8$

7.4. Рішення нормальних рівнянь (перша схема Гаусса)

Зведемо обчислені в табл..13 коефіцієнти у трикутну матрицю для рішення нормальних рівнянь

Таблиця 14. Коефіцієнти нормальних рівнянь для першої схеми Гаусса

	x°	$x]$	$x^2]$	$x^3]$	$y]$	$s]$	контроль
$[x^\circ$	9	405	25818,751	1845281,3	-76,02	1871437,6	1871438,1
$[x$		25818,751	1845281,3	$1,4051048 \cdot 10^8$	-3352,5	$1,4237862 \cdot 10^8$	$1,4237864 \cdot 10^8$
$[x^2$			$1,4051048 \cdot 10^8$	$1,1132236 \cdot 10^{10}$	-212938,88	$1,1274353 \cdot 10^{10}$	$1,1274405 \cdot 10^{10}$
$[x^3$				$9,0612411 \cdot 10^{11}$	-15240713	$9,1737977 \cdot 10^{11}$	$9,1738346 \cdot 10^{11}$



Таблиця 15. Рішення нормальних рівнянь (друга схема Гаусса)

№п/п	x^0]d	x]c	x^2]b	x^3]a	y]	s]	контроль
1	[x^0	9	405	25818,751	1845281,3	-76,02	1871437,6
2		-1	-45	-2868,7501	-205031,25	+8,4466666	-207937,51
3	[x		25818,751	1845281,3	$1,4051048 \cdot 10^8$	-3352,5	$1,4237862 \cdot 10^8$
4			-18225	-1161843,8	-83037656	+3420,9	-84214691
5			+7593,751	+683437,5	+57472820	+68,4	+58163930
6			-1	-89,999988	-7568,4362	$-9,0074062 \cdot 10^{-3}$	-7659,4465
7	[x^2			$1,4051048 \cdot 10^8$	$1,1132236 \cdot 10^{10}$	-212938,88	$1,1274353 \cdot 10^8$
8				-74067544	$-5,2936507 \cdot 10^9$	+218082,38	$-5,3686867 \cdot 10^8$
9				-61509367	$-5,1925531 \cdot 10^9$	-6155,9992	$-5,234753 \cdot 10^9$
10			[$x^2 x^2 \cdot 2$]=	+4933573	$+6,660319 \cdot 10^8$	-1012,5	$+6,70913 \cdot 10^8$
11				-1	-134,9999	+2,0522651	-135,98927
12	[x^3				$9,0612411 \cdot 10^{11}$	-15240713	$9,1737977 \cdot 10^{11}$
13				[$x^3 x^3 \cdot 2$]=	$-3,7834033 \cdot 10^{11}$	+15586476	$-3,8370319 \cdot 10^{11}$
14					$-4,3497937 \cdot 10^{11}$	-517681,04	$-4,4020999 \cdot 10^{11}$
15			[$x^3 x^3 \cdot 2$]		$-8,9914239 \cdot 10^8$	+136687,4	$-9,0573191 \cdot 10^8$
16			Pa=[$x^3 x^3 \cdot 3$]=		$+2,890171 \cdot 10^9$	-35230,64	$+2,8934 \cdot 10^8$
17					-1	$+1,2189811 \cdot 10^{-5}$	-1,0011172
18							0,9999878
19		+8,446666	$-9,0074062 \cdot 10^{-3}$	$+2,0522651 \cdot 10^{-4}$	$+1,2189811 \cdot 10^{-5}$		
20		-205031,250	-7568,4362·a	-134,9999a	a		
21		-2868,7501	-89,999988·b	$-1,4403667 \cdot 10^{-3}$			
22		b					
23		-45c	$+2,8370474 \cdot 10^{-2}$	b			
24		+8,8028413	c				
25		d					

7.5. Рішення нормальних рівнянь по другій схемі Гаусса

Як і раніше, з метою визначення ваг коефіцієнтів d і c переставимо строчки системи нормальних рівнянь і члени в строчках так, щоб коефіцієнт d був на останньому місці, а коефіцієнт c в передостанньому стовпчику перед стовпчиком вільних членів.

Таблиця 16. Коефіцієнти нормальних рівнянь для другої схеми Гаусса

	x^3]	x^2]	x]	x^0]	y]	s]	контроль
[x^3	$9,0612411 \cdot 10^{11}$	$1,1132236 \cdot 10^{10}$	$1,4051048 \cdot 10^8$	1845281,3	-15240713	$9,1738346 \cdot 10^{11}$	
[x^2		$1,4051048 \cdot 10^8$	1845281,3	25818,751	-212938,88	$1,1274353 \cdot 10^{10}$	
[x			25818,751	405	-3352,5	$1,4237864 \cdot 10^8$	
[x^0				9	-76,02	1871437,6	

Таблиця 17. Рішення нормальних рівнянь (друга система Гаусса)

№п/п		x^3]a	x^2]b	x]c	x^0]d	y	s	контроль
1	[x^3	$9,0612411 \cdot 10^{11}$	$1,1132236 \cdot 10^{10}$	$1,4051048 \cdot 10^8$	1845281,3	-15240713	$9,1738346 \cdot 10^{11}$	
2		-1	$-1,2285553 \cdot 10^{-2}$	$-1,5506758 \cdot 10^{-4}$	$-2,0364553 \cdot 10^{-5}$	$+1,6819674 \cdot 10^{-5}$	-1,0124558	-1,0124558
3	[x^2		$1,4051048 \cdot 10^8$	1845281,3	25818,751	-212938,88	$1,1274353 \cdot 10^{10}$	
4			$-1,3676567 \cdot 10^8$	-1726248,8	-22670,301	+187240,58	$-1,1270562 \cdot 10^8$	
5	Σ	[$x^2 x^2 \cdot 1$][bb1]	3744810	119032,5	+3148,45	-25698,3	3791000	3841292,7
6			-1	$-3,1785991 \cdot 10^{-2}$	$-8,4075026 \cdot 10^{-4}$	$+6,8623776 \cdot 10^{-3}$	-1,0123344	-1,0257643
7	[x			25818,751	405	-3352,5	$1,4237864 \cdot 10^8$	
8				-2,1788,62	-286,14331	+2363,3404	$-1,4225643 \cdot 10^8$	
9				-3783,56598	-100,07661	+816,84596	-122099,28	
10	Σ		[$xx \cdot 2$]=	+246,5651	+18,78008	-172,31364	+110,72	93,03154
11				-1	$-7,6166821 \cdot 10^{-2}$	$+6,9885656 \cdot 10^{-1}$		-0,3773102
12	[x^0				9	-76,02	1871437,6	

4				$[x^{\circ}x^{\circ}2]=$	-3,7578328	+31,037029	-1868210,3	
15				$[x^{\circ}x^{\circ}2]=$	-2,6470602	+21,605853	-3230,0351	
16	Σ			$Pd=[x^{\circ}x^{\circ}3]=$	-1,4304186	+13,124582	-7,0859157	
17					+1,1646884	+10,252536	-9,8210157	-9,087848
18					-1	+8,8028145	+8,4323	+7,8028145
19		$+1,6819674 \cdot 10^{-5}$	$+6,8623776 \cdot 10^{-3}$	$+6,9885656 \cdot 10^{-1}$	+8,8028145			
20		$-2,0364553 \cdot 10^{-6}d$	$-8,4075026 \cdot 10^{-4}d$	$-7,6166821 \cdot 10^{-2}d$	d			
21		$-1,5506758 \cdot 10^{-4}c$	$-3,1785991 \cdot 10^{-2}c$	$+2,837416 \cdot 10^{-2}$				
22		$-1,2285553 \cdot 10^{-2}b$	$-1,4404918 \cdot 10^{-3}$	c				
23		$+1,2190462 \cdot 10^{-5}$	B					
23		a						

У зв'язку з переходом від дванадцятизначних цілих чисел до дробових замітна втрата точності при діленні їх і подальшому оперуванні з дробовими числами. Тому для виконання контролю в 5 стрічці необхідно число 119032,5 помножити не на фактичне число -1,0123344 із шостої стрічки стовпчика сум, яке втратило точність, а на контрольну суму -1,0257643.

Тоді, $119032,5 \cdot (-1,0257643) = -122099,28$ і його записуємо у дев'яту стрічку стовпчика сум. Якщо цього (втрати точності) не враховувати, то замість правильного числа 122099,28 отримаємо неправильне число 120500,69, різниця яких буде 1598,59 і про подальші контролю, які базуються на попередніх вже не може бути і мови.

Але навіть і в цьому випадку контрольне число десятої стрічки стовпчика сум +110,72 не дорівнює контрольному 93,03154. Знайдемо яке ж має бути число замість взятого нами контрольного -1,0257643,

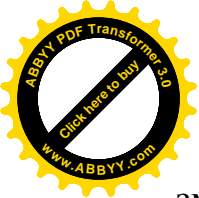
Тоді,

$$((110,72 - 93,03154) + 122099,28) / 22116,97 = 1,0259128.$$

Тобто, замість числа 1,0257643 необхідно взяти число 1,0259128. Різниця ж цих чисел 0,0001485 лежить за межами точності даного конкретного випадку.

Фактично можемо вважати, що розрахунки за схемою Гаусса в нашому конкретному випадку забезпечують точність до чотирьох значущих цифр після коми.

Але контролю нам потрібні не для виконання процедури контролів, а для контролю рішення системи нормальних рівнянь. Заключний же контроль вирішує проблему всіх проміжних контролів в цілому. А заключні контролю і по першій і по другій схемах Гаусса виконуються добре.



Таким чином із вищесказаного видно, що коефіцієнти необхідно зменшувати в K раз. Тоді будуть виконуватися і проміжні контролю і зручно оперувати з такими числами.

Але при цьому необхідно знати лише ключ переходу від зрівноважених параметрів з коефіцієнтом K .

7.6. Встановлення ключа переходу. Порівняльний аналіз.

Таблиця 18. Зведена таблиця результатів зрівноваження при $K=1$ і $K=100$

№п/п	1: к	a	B	c	d	Pa	Pd
1	2	3	4	5	6	7	8
1	1:1	$1,2190 \cdot 10^{-5}$	$-1,4404 \cdot 10^{-3}$	$2,8370 \cdot 10^{-3}$	+8,80284	$2,890 \cdot 10^9$	1,164
2	1:100	$1,2190 \cdot 10^{-1}$	$-14404 \cdot 10^{-1}$	$2,840 \cdot 10^{-3}$	+8,80284	$2,890 \cdot 10^{-3}$	$1,164 \cdot 10^{-4}$
3	1:1	$a100/k^2$	$b100/k^2$	$b1=b100$	$d1=d100$	$Pa1=Pa100 \cdot (k^2)^3$	$Pd1=Pd100 \cdot k^2$

Продовження таблиці 18

№п/п	1: к	$[xx \cdot 2]$	$[x^o x^o \cdot 2]$	$[x^2 x^2 \cdot 2]$	$[x^3 x^3 \cdot 2]$
1	2	9	10	11	12
1	1:1	246,5651	2,59511	4933573	$9,28044 \cdot 10^{10}$
2	1:100	$2,465 \cdot 10^{-2}$	$2,59511 \cdot 10^{-4}$	$4,933 \cdot 10^{-2}$	$9,28043 \cdot 10^{-2}$
3	1:1	$[xx \cdot 2]$ $100 \cdot k^2$	$[x^o x^o \cdot 2] 100 \cdot k^2$	$[x^2 x^2 \cdot 2]$ $100 \cdot (k^2)^2$	$[x^3 x^3 \cdot 2] 100 \cdot (k^2)^3$

Із результатів зрівноваження, проведених в табл. 18 випливає

1. Якщо в початкових умовах рівняннях зменшити значення вихідних параметрів x і y в k разів, то отриманий коефіцієнт a при x^3 із рішення нормальних рівнянь необхідно зменшити у k^2 разів, тобто

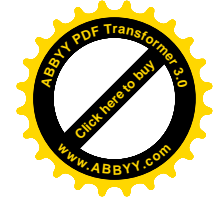
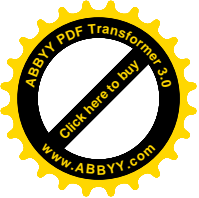
$$a_1 = \frac{a_k}{k^2}$$

Дійсно, в нашому випадку

$$a_1 = \frac{a_{100}}{100^2} = \frac{1,2190 \cdot 10^{-1}}{100^2} = 1,2190 \cdot 10^{-5}$$

Теорема 1 доказана.

2. При даних умовах отриманий коефіцієнт b при x^2 необхідно зменшити в k разів



$$b_i = \frac{b_k}{k}$$

тому що

$$-1,4404 \cdot 10^{-1}$$

$$b_i = \frac{-1,4404 \cdot 10^{-1}}{100} = -1,4404 \cdot 10^{-3}$$

Теорема 2 доказана.

3. При даних умовах отриманий коефіцієнт c при x залишається без змін

$$c_1 = c_{100} = 2,840 \cdot 10^{-3}$$

Теорема 3 доказана.

4. При даних умовах коефіцієнт d залишається без змін

$$d_1 = d_{100} = +8,80284$$

Теорема 4 доказана

5. При даних умовах вагу останнього невідомого P_a необхідно збільшити у $(k^2)^3$ разів.

Дійсно

$$P_{a1} = P_{ak} \cdot (k^2)^3 = P_{a100} \cdot (100^2)^3 = 2,890 \cdot 10^{-3} \cdot (100^2)^3 = 2,890 \cdot 10^9$$

Теорема 5 доказана.

6. При даних умовах вагу P_d коефіцієнта d необхідно збільшити у k^2 разів

$$P_{d1} = P_{dk} \cdot k^2 = P_{d100} \cdot 100^2 = 1,164 \cdot 10^{-4} \cdot 100^2 = 1,164$$

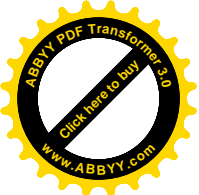
Теорема 6 доказана

7. При даних умовах коефіцієнт $[xx \cdot 2]$ для визначення ваги P_b необхідно збільшити у (k^2) разів.

Дійсно

$$\begin{aligned} [xx \cdot 2]_1 &= [xx \cdot 2]_k \cdot (k^2) = 2,465 \cdot 10^{-2} \cdot (100^2) = 2,465 \cdot 10^{-2} \cdot 10^4 = \\ &= 2,465 \cdot 10^2 = 246,5 \end{aligned}$$

Теорема доказана



10. При даних умовах коефіцієнт $[x^0x^0 \cdot 2]$ для визначення ваги Рb необхідно збільшити у κ^2 разів.

$$[x^0x^0 \cdot 2]_1 = [x^0x^0 \cdot 2]_{\kappa} \cdot \kappa^2 = 2,595 \cdot 10^{-4} \cdot (100)^2 = 2,595$$

Теорема доказана

11. При даних умовах коефіцієнт $[x^2x^2 \cdot 2]$ для визначення ваги Рс необхідно збільшити у $(\kappa^2)^2$ раз.

$$[x^2x^2 \cdot 2]_1 = [x^2x^2 \cdot 2]_{\kappa} \cdot (\kappa^2)^2 = 4,933 \cdot 10^{-2} \cdot (100^2)^2 = 4,933 \cdot 10^{-2} \cdot 10^8 = 4,933 \cdot 10^6$$

Теорема доказана

12. При даних умовах коефіцієнт $[x^3x^3 \cdot 2]$ для визначення ваги Рс необхідно збільшити у $(\kappa^2)^3$ раз

$$[x^3x^3 \cdot 2]_1 = [x^3x^3 \cdot 2]_{\kappa} \cdot (\kappa^2)^3 = 9,2804 \cdot 10^{-2} \cdot (100^2)^3 = 9,280 \cdot 10^{10}$$

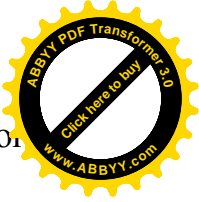
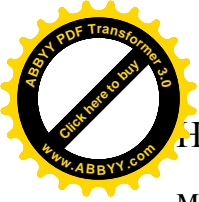
Теорема доказана

В заключення відмітимо, що аналогічні дослідження були проведені при коефіцієнті масштабування, рівному 10, що абсолютно підтвердило дані твердження.

Крім рішення нормальних рівнянь по схемі Гаусса проводилось рішення на мікроЕОМ по розробленій автором програмі. Зведемо всі результати в таблицю 19.

Таблиця 19. Зведена таблиця результатів побудови математичної моделі.

№п/п	$a \cdot 10^{-5}$	$b \cdot 10^{-3}$	$c \cdot 10^{-2}$	d	Нк
1	1,2189811	-1,4403967	2,8370474	8,8028413	1:1
2	1,2190193	-1,4404495	2,8372336	8,8028306	1:1
3	1,2190462	-1,4404918	2,837416	8,8028145	1:1
4	1,2187907	-1,440119	2,83589	8,802912	1:1
5	1,2189736	-1,4403861	2,8370087	8,802838	1:100
6	1,2185367	-1,4397769	2,834832	8,802971	1:100
7	1,2190277	-1,4404609	2,8372721	8,8028286	1:100
8	1,2190915	-1,440566	2,837784	8,802769	1:100
модель	$1,2190 \cdot 10^{-5}$	$-1,4404 \cdot 10^{-3}$	$2,8370 \cdot 10^{-2}$	8,8028	



На основі проведених досліджень отримана формула залежності магнітного моменту Землі від широти

$$Y=M=1,2190 \cdot 10^{-5} x^3 - 1,4404 \cdot 10^{-3} x^2 + 2,8370 \cdot 10^{-2} x + 8,8028. (7.11)$$

де x – геомагнітна широта пункту спостереження, виражена в градусах.

№п/п	X(град)	$y=m \cdot 10^{22}$	$y'=m' \cdot 10^{22}$	$v=m-m'$	v^2
1	0,00	8,79	8,803	-0,013	0,000169
2	11,25	8,90	8,957	-0,057	0,003249
3	22,50	9,05	8,851	+0,199	0,039601
4	33,75	8,50	8,598	-0,088	0,007744
5	45,00	8,18	8,274	-0,094	0,008836
6	56,25	8,00	8,011	-0,011	0,000121
7	67,50	7,95	7,904	+0,046	0,002116
8	78,75	8,12	8,057	+0,063	0,003969
9	90,00	8,53	8,575	-0,045	0,002025

7.7. Оцінка точності результатів

Вичислимо за формулою (7.11) значення M' і розрахуємо поправки

$$V_i = M_i - M'_i \quad (7.12)$$

Для розрахунку M'_i скористаємося програмою заключного контролю 5.

Таблиця 20. Порівняльний аналіз результатів строгого зрівноваження

$n=9$		Σ	$76,02 \cdot 10^2$	$\Sigma 0$	0,06783
-------	--	----------	--------------------	------------	---------

Середню квадратичну похибку одиниці ваги розрахуємо за формулою

$$\mu = \frac{\Sigma V^2}{n-k} \quad (7.13)$$

де n – число вихідних параметрів x і y , k – степінь поліному.

В нашому випадку

$$\mu = \sqrt{\frac{0,06783}{9-3}} \cdot 10^{22} = 0,11 \cdot 10^{22} \text{ ам}$$

Гранична похибка

$$\Delta_{гр.} = 2,5\mu = 0,26 \cdot 10^{22} \text{ ам}$$

Відносна похибка

$$\frac{\mu}{M_{середн.}} = \frac{0,11 \cdot 10^{22}}{\frac{76,02 \cdot 10^{22}}{9}} = 0,013$$

Відносна похибка у відсотках $\Delta_{відн. \%} = \Delta_{відн.} \cdot 100\% = 1,3\%$.

Середня квадратична похибка визначення коефіцієнта а

$$m_a = \mu \sqrt{\frac{1}{P_a}} = \mu \sqrt{\frac{1}{[x^3 x^3 \cdot 3]}} = 0,11 \sqrt{\frac{1}{2,89 \cdot 10^9}} = 2,05 \cdot 10^{-6}$$

Середня квадратична похибка визначення коефіцієнта d

$$m_d = \mu \sqrt{\frac{1}{P_d}} = \mu \sqrt{\frac{1}{[x^0 x^0 \cdot 3]}} = 0,11 \sqrt{\frac{1}{1,165}} = 0,11$$

Середня квадратична похибка визначення коефіцієнта с

$$\frac{P_c}{[xx \cdot 2]} = \frac{P_d}{[x^0 x^0 \cdot 2]}; \quad P_c = P_d \frac{[xx \cdot 2]}{[x^0 x^0 \cdot 2]}; \quad [x_0 x_0 \cdot 2] = [x^0 x^0] \cdot \frac{[x^3 x^0][x^3 x^0]}{[x^3 x^3]} - \frac{[x^2 x^0 \cdot 1][x^2 x^0 \cdot 1]}{[x^2 x^2 \cdot 1]} = 9 - 3,7578328 - 2,6470602 = 2,595107 \quad (\text{див.}$$

строчки 12,13,14 II схеми Гаусса.)

$$m_c = \mu \sqrt{\frac{1}{P_c}} = 0,11 \sqrt{\frac{1}{110,658}} = 1,04 \cdot 10^{-2},$$

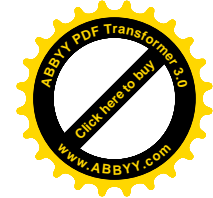
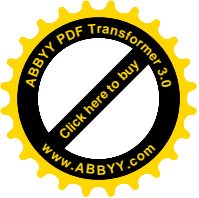
$$1,164 \cdot 246,56$$

$$\text{де } P_c = \frac{1,164 \cdot 246,56}{2,595} = 110,658.$$

Середня квадратична похибка визначення коефіцієнта b

$$[x^3 x^3 \cdot 2] = [x^3 x^3] \cdot \frac{[x^0 x^3][x^0 x^3]}{[x^0 x^0]} - \frac{[x^2 x^3 \cdot 2][x^2 x^3 \cdot 2]}{[x^2 x^2 \cdot 2]} = 9,061 \cdot 10^{11} - 3,783 \cdot 10^{11} - 4,349 \cdot 10^{11} = 9,28 \cdot 10^{10}$$

$$m_b = \mu \sqrt{\frac{1}{P_b}} = 2,81 \cdot 10^{-4},$$



Висновки

На основі проведених досліджень в даній роботі:

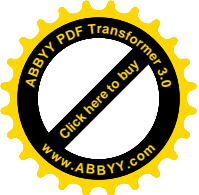
1. Побудована ймовірніша математична модель залежності магнітного моменту Землі від геомагнітної широти:

$$M=1,2190 \cdot 10^{-5} \varphi_M^3 - 1,4404 \cdot 10^{-3} \varphi_M^2 + 2,8370 \cdot 10^{-2} \varphi_M + 8,8028,$$

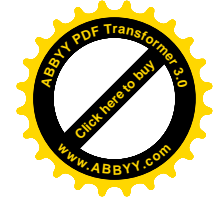
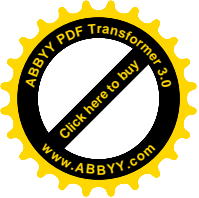
$$\text{де } a=1,2190 \cdot 10^{-5}; \quad b=-1,4404 \cdot 10^{-3};$$

$$c=2,8370 \cdot 10^{-2}; \quad d=8,8028.$$

2. Математична модель апроксимована по способу найменших квадратів кубічним поліномом.
3. Встановлено, що середня квадратична похибка одиниці ваги при розрахунку за виведеного формулою становить 0,11 значень геомагнітного моменту, визначаємого за виведеною формулою, а відносна похибка становить 1,3%
4. Середня квадратична похибка визначення коефіцієнта a $m_a=2.05 \cdot 10^{-6}$
5. Середня квадратична похибка визначення коефіцієнта b $m_b=2.81 \cdot 10^{-4}$
6. Середня квадратична похибка визначення коефіцієнта c $m_c=1.04 \cdot 10^{-2}$
7. Середня квадратична похибка визначення коефіцієнта d $m_d=0.11$
8. Побудована математична модель приймається за істинну модель, на основі якої генеруються істинні похибки і будуються спотворені моделі для подальших досліджень методом статистичних випробувань Монте Карло.
9. З метою раціоналізації проведення математичної обробки спотворених моделей для дослідження точності визначення геомагнітного моменту Землі проведені дослідження при введенні коефіцієнта K в результати вихідних параметрів x і y .

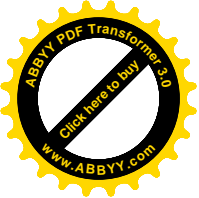


13. В результаті досліджень встановлено, що при цьому отриманих коефіцієнт a із рішення нормальних рівнянь необхідно зменшити у K^2 разів, коефіцієнт b слід зменшити у K разів, коефіцієнт c і d слід залишити без зміни.
14. Доведено, що при коефіцієнті масштабування вихідних параметрів K вагу коефіцієнта a необхідно збільшити у $(K^2)^3$, а вагу коефіцієнта d слід збільшити у K^2 раз.
- Коефіцієнти $[x \cdot x \cdot 2]$ і $[x^\circ x^\circ \cdot 2]$ для визначення ваги P_b необхідно збільшити у K^2 раз.
- Коефіцієнт $[x^2 x^2 \cdot 2]$ необхідно збільшити у $(K^2)^2$ раз а коефіцієнт $[x^3 x^3 \cdot 2]$ слід збільшити у $(K^2)^3$ раз для визначення ваги P_c коефіцієнта c .
15. Проведені дослідження дають можливість організувати широкомасштабні дослідження точності визначення магнітного моменту Землі методом статистичних випробувань Монте Карло.
16. Розроблені програми для організації обчислень на мікроЕОМ.
17. Розроблені генератори випадкових чисел і побудовані перші спотворені моделі.

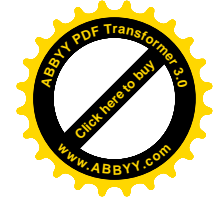
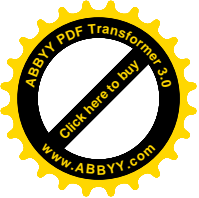


Література

1. Кронштейн И.Н., Семендяев К.А. Справочник по математике для инженеров и учащихся ВТУЗОВ. – М.: Наука, 1980, - 975с.
2. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике. – М.: Наука, 1973, 831с.
3. Кошкин Н.И., Ширкевич М.Г. Справочник по элементарной физике. М.: Наука, 1972, -255с.
4. Кучерук І.М., Горбачук І.Т., Луцик П.П. Загальний курс фізики. Т.1. - К.: техніка, 1999, -536с.
5. Кучерук І.М., Горбачук І.Т., Луцик П.П. Загальний курс фізики Т.2. - К.: техніка, 2001, -452с.
6. Кучерук І.М., Горбачук І.Т. Загальний курс фізики Т.3. - К.: техніка, 1999, -520с.
7. Літнарівч Р.М. Основи математики. Дослідження результатів психолого-педагогічного експерименту поліноміальною функцією. Навчальний посібник. Частина 7. МЕНУ, Рівне, 2006, -20с.
8. Мудров В.И., Кушко В.Л. Методы обработки измерений. М.: Сов.радио, 1976, - 192с.
9. Пастушенко С.М. Формули і закони загальної фізики: Навчальний посібник для студентів вищих навчальних закладів. 2е вид.: Діал., 2005, -268с.
10. Рего К.Г. Метрологическая обработка результатов технических измерений. Справочное пособие. –К.: техніка, 1987, -126с.



11. Розв'язування задач з курсу загальної фізики. Практикум/Остроухов, Стрижевський В.Л., Цвілих М.Г. та інші. К.: Радянська школа, 1966, - 503с.
12. Савельєв И.В. Курс физики. Т.1. – М.: наука, 1989, -352с.
13. Савельєв И.В. Курс физики. Т.2. – М.: наука, 1989, -464с.
14. Савельєв И.В. Курс общей физики. – М.: наука, 1982, -304с.
15. Ситніков О.П. Основи електродинаміки. Лабораторний практикум. Чернігів: ЧДІЕіУ, 2003, -48с.
16. Суботін С.І. Кора і мантія Землі. –К.: Знання, 1966, -39с.
17. Топографо-геодезические термины: Справочник / Б.С.Кузьмин, Ф.Я. Герасимов, В.М. Молоканов и др.. – М.: Недра, 1989, -261с.
18. Федоров Є.П. Обертання Землі. –К.: Знання, 1966, -52с.
19. Фізика з використанням обчислювальної техніки. Практичний курс. / В.М.Казанський, В.І. Клапченко, І.Д.Кошелева та інші. – К.: Либідь, 1993, -224с.



Літнарівч Руслан Миколайович

доцент, кандидат технічних наук

ДОСЛІДЖЕННЯ ТОЧНОСТІ АПРОКСИМАЦІЇ
ЗАЛЕЖНОСТІ МАГНІТНОГО МОМЕНТУ
ЗЕМЛІ ВІД ШИРОТИ МЕТОДОМ
СТАТИСТИЧНИХ ВИПРОБУВАНЬ
МОНТЕ КАРЛО

Частина 1

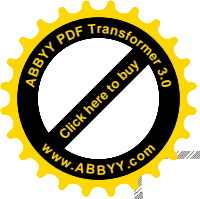
Комп'ютерний набір, верстка, редагування і дизайн у редакторі Microsoft
office 2003:

Дзюбишина Галина Василівна

Дзюбишина Наталія Василівна

Міжнародний Економіко-Гуманітарний університет ім..акад. С.Дем'янчука

33027, м. Рівне, вул. акад. С.Дем'янчука, 4



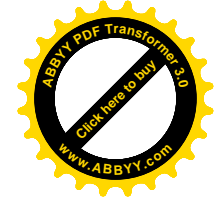
Міністерство освіти і науки України
Міжнародний економіко-гуманітарний університет
імені академіка
Степана Дем'янчука

Р. М. Літнарівич

**Встановлення зв'язку між
географічною і геомагнітною
системами координат**

Частина 2

м. Рівне, 2006



УДК 629.123.053.12

Літнарівич Р.М. Встановлення зв'язку між
географічною і геомагнітною системами координат.
Частина 2. МЕНУ, Рівне, 2006, 47- ст..

Рецензенти:

В.Г.Бурачек, доктор технічних наук, професор
Є.С.Парняков, доктор технічних наук, професор
В.О.Боровий, доктор технічних наук, професор

Відповідальний за випуск:

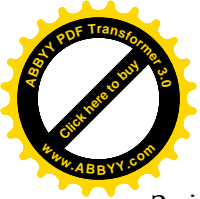
Й.В.Джунь, доктор фізико-математичних наук,
професор

Встановлений зв'язок між географічною і
геомагнітною системами координат. Приводиться від
форму і даються приклади обчислень.

Для спеціалістів, які займаються вивченням
геомагнітного поля Землі.

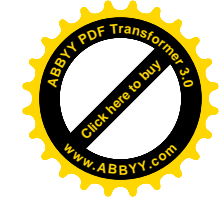
Буде корисна студентам-географам і аспірантам.

© Р.М.Літнарівич



Передмова

	Стор.
1. Встановлення зв'язку між географічною і геомагнітною системами координат.....	4
2. Визначення азимута і віддалі між двома станціями спостережень.....	11
3. Визначення координат станції спостереження.....	19
4. Встановлення залежності між кутом нахилу магнітної стрілки і геомагнітною широтою пункту спостережень.....	22
5. Апроксимація залежності вертикальної складової B_z індукції магнітного поля Землі від геомагнітної широти.....	27
6. Апроксимація залежності горизонтальної складової індукції магнітного поля Землі від геомагнітної широти.....	31
7. Апроксимація залежності індукції поля однорідного намагнічування земної кулі від геомагнітної широти.....	33
8. Апроксимація залежності магнітного моменту земної кулі від широти.....	35
9. Дослідження залежності сили струму тангенціального гальванометра від широти пункту спостереження.....	37
10. Представлення вертикальної складової індукції геомагнітного поля Землі через горизонтальну.....	42
Висновки.....	43
Література.....	45



1. ВСТАНОВЛЕННЯ ЗВ'ЯЗКУ МІЖ ГЕОГРАФІЧНОЮ І ГЕОМАГНІТНОЮ СИСТЕМАМИ КООРДИНАТ

Точки на поверхні Землі, де перетинаються магнітні меридіани, називаються магнітними полюсами Землі. В магнітних полюсах вектор індукції магнітного поля Землі досягає максимальної величини і направлений під прямим кутом вниз на північному і вверх на південному полюсах. Магнітні полюси Землі не співпадають із географічними полюсами і розташовані в глибині Землі. На 1975 рік координати північного магнітного полюса $\varphi=75^{\circ}33'$ пн.ш., $\lambda=100^{\circ}23'$ з.д. – острів Батерст, Канадський архіпелаг; південного – $\varphi=66^{\circ}05'$ пд.ш., $\lambda=139^{\circ}36'$ с.д. – Східна Антарктида. Всі елементи земного магнетизму зазнають періодичних коливань із добовим і річним ходом, а також з року в рік – вікові коливання. Протягом геологічної історії Землі поряд із значним переміщенням магнітних полюсів неодноразово змінювалася їх полярність. В нашу епоху у північній півкулі знаходиться південний (від'ємний) магнітний полюс, а в південній – північний (позитивний). Магнітні силові лінії виходять із позитивного і входять у від'ємний полюс. Але магнітні полюси прийнято називати у відповідності із півкулею, в якій кожний із них знаходиться. Спостереження за змінами магнітного поля Землі здійснюється службою земного

магнетизму. По аналогії з астрономією встановимо системи координат на земній кулі (рис.1).

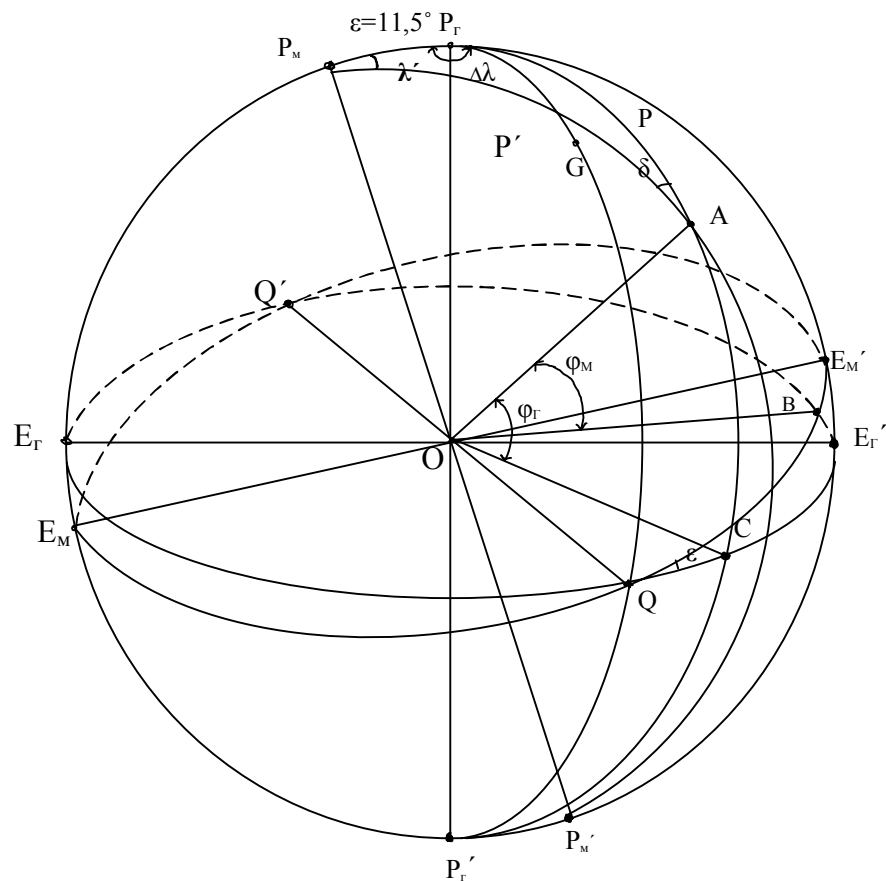


Рис.1 Географічна і геомагнітна система координат
 P_G, P'_G – географічні полюси Землі,
 P_M, P'_M – геомагнітні полюси Землі,
 $E_G Q C E'_G Q'$ – географічний екватор,
 $E_M Q B E'_M Q'$ – геомагнітний екватор,

$P_G A C P'_G$ – географічний меридіан, що проходить через точку А спостережень,
 $P_M A B P'_M$ – геомагнітний меридіан, що проходить через точку А спостережень,
 $P_G Q P'_G$ – початковий Гринвіцький меридіан,
 δ – схилення магнітної стрілки,
 $P = 90^\circ - \varphi_G$; $P' = 90^\circ - \varphi_M$; $\angle \Delta\lambda = P_M P_G A$.

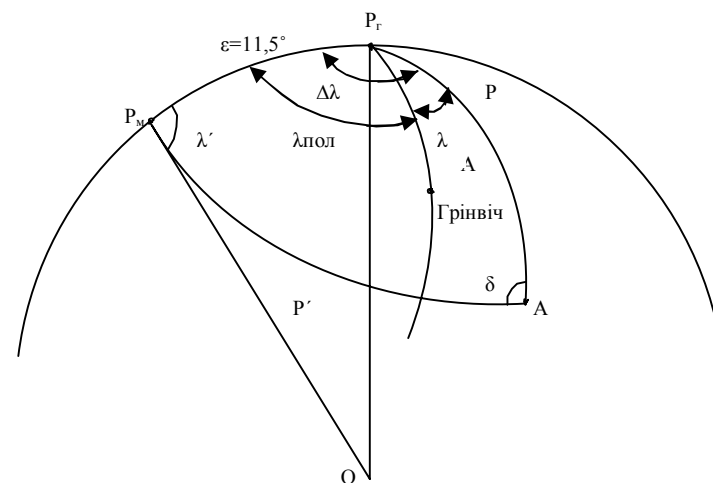
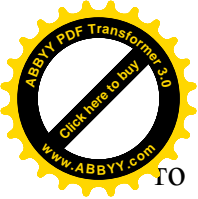


Рис. 2. Полусный трикутник

Географічні координати лабораторії, яка розташована у місті Рівне $\varphi_{Г.а} = 50^\circ 45,0'_{\text{пн.ш.}}$; $\lambda_{Г.а} = 26^\circ 07,5'_{\text{с.д.}}$ (фі і лямбда географічне точки А). Приймаючи до уваги, що довгота лабораторії рівна $26^\circ 07,5'_{\text{с.д.}}$, а довгота меридіана, на якому розташований геомагнітний полюс P_M дорівнює $\lambda_{\text{пол}} = 100^\circ 23'_{\text{з.д.}}$,



ГО

$$\Delta\lambda = \lambda_{\text{пол}} + \lambda_A = 100^\circ 23' + 26^\circ 07,5' = 126^\circ 30,5'.$$

Полюсний елемент дуги географічного меридіану p розраховується за формулою

$$p = 90^\circ - \varphi_{Г.А} \quad (1.1)$$

і в нашому випадку

$$p = 90^\circ - 50^\circ 45,0' = 39^\circ 15,0'.$$

Скористаємося теоремою косинусів для сферичного трикутника $P_M P_{Г.А}$:

косинус сторони сферичного трикутника дорівнює добутку косинусів двох других його сторін, плюс добуток синусів тих же сторін, помножених на косинус кута між ними.

$$\cos p' = \cos \varepsilon \cos p + \sin \varepsilon \sin p \cos \Delta\lambda. \quad (1.2)$$

або

$$p' = \arccos[\cos \varepsilon \cos p + \sin \varepsilon \sin p \cos \Delta\lambda]. \quad (1.3)$$

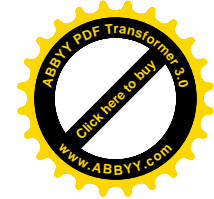
І в нашому випадку

$$p' = \arccos[\cos 11,5^\circ \cos 39^\circ 15' + \sin 11,5^\circ \sin 39^\circ 15' \cos 126^\circ 30,5'] = 46,85868505^\circ = 46^\circ 51' 31,3''.$$

Тепер у нас з'являється можливість визначити кут δ між магнітним і географічним меридіанами в точці А, тобто постійну складову схилення магнітної стрілки. Для цього використаємо теорему синусів, яка у випадку сферичного трикутника формулюється наступним чином:

Синуси сторін пропорційні синусам кутів, тобто

$$\frac{\sin \delta}{\sin \varepsilon} = \frac{\sin \Delta\lambda}{\sin p'}. \quad (1.4)$$



При цьому

$$\sin \delta = \frac{\sin \varepsilon \sin \Delta\lambda}{\sin p'}; \quad (1.5)$$

або

$$\delta = \arcsin \left[\frac{\sin \varepsilon \sin \Delta\lambda}{\sin p'} \right]. \quad (1.6)$$

Тоді

$$\delta = \arcsin \left[\frac{\sin 11,5^\circ \sin 126^\circ 30,5'}{\sin 46,85868505^\circ} \right] = 12,68639607^\circ = 12^\circ 41' 11'' 0.$$

Визначимо кут λ' :

$$\frac{\sin \lambda'}{\sin p} = \frac{\sin \Delta\lambda}{\sin p'}. \quad (1.7)$$

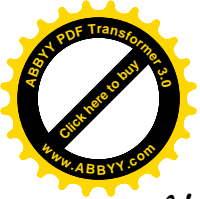
При цьому

$$\sin \lambda' = \frac{\sin p \sin \Delta\lambda}{\sin p'}, \quad (1.8)$$

або

$$\lambda' = \arcsin \left[\frac{\sin p \sin \Delta\lambda}{\sin p'} \right]. \quad (1.9)$$

І в нашому випадку



$$\lambda' = \arcsin \left[\frac{\sin 39^\circ 15' \sin 126^\circ 30,5'}{\sin 46,85868505^\circ} \right] =$$

$$= 44,18354444^\circ = 44^\circ 11' 00,76''.$$

І контрольне визначення

$$\frac{\sin \delta}{\sin \varepsilon} = \frac{\sin \lambda'}{\sin p}, \quad (1.10)$$

тоді

$$\sin \delta = \frac{\sin \varepsilon \sin \lambda'}{\sin p}, \quad (1.11)$$

або

$$\delta = \arcsin \left[\frac{\sin \varepsilon \sin \lambda'}{\sin p} \right], \quad (1.12)$$

і

$$\delta = \arcsin \left[\frac{\sin 11,5^\circ \sin 44,18354444^\circ}{\sin 39^\circ 15'} \right] =$$

$$= 12,68639607^\circ = 12^\circ 41' 11,0''.$$

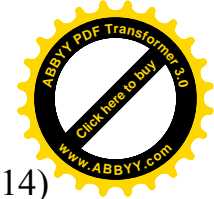
Геомагнітна широта точки спостереження знаходиться за формулою:

$$\varphi_m = 90^\circ - P', \quad (1.13)$$

і в нашому випадку геомагнітна широта лабораторії міста Рівне буде:

$$\varphi_{m.p.} = 90^\circ - 46^\circ 51' 31,3'' = 43^\circ 08' 28,7''.$$

Різниця широт географічної і геомагнітної точки спостереження буде



$$\Delta \varphi = \varphi_{\text{геогр.}} - \varphi_{\text{магн.}} \quad (1.14)$$

І в нашому випадку:

$$\Delta \varphi = 50^\circ 45,5' - 43^\circ 08' 28,7'' = 7^\circ 46' 31,3''.$$

Таким чином, на основі проведених теоретичних і практичних досліджень, нами:

1. Встановлена різниця довгот між положенням магнітного полюса Землі і лабораторії м. Рівне $\Delta \lambda = 126^\circ 30,5'$.
2. Виведена формула для розрахунку полярної віддалі P' будь-якої точки спостереження на земній кулі.
3. Отримана формула для визначення постійної складової схилення магнітної стрілки δ для будь-якої точки спостереження на Землі і встановлено, що для нашої лабораторії $\delta = 12^\circ 41' 11,0''$.
4. Виведена формула контрольного розрахунку δ .
5. Приведена формула розрахунку кута λ' між напрямком меридіану, що проходить через магнітний і географічний полюси Землі і меридіаном будь-якої точки Землі.
6. Встановлена геомагнітна широта лабораторії $\varphi_m = 43^\circ 08' 28,7''$ і різниця широт географічної геомагнітної $\Delta \varphi = 7^\circ 46' 31,3''$.

2. ВИЗНАЧЕННЯ АЗИМУТА І ВІДДАЛІ МІЖ ДВОМА СТАНЦІЯМИ СПОСТЕРЕЖЕНЬ.

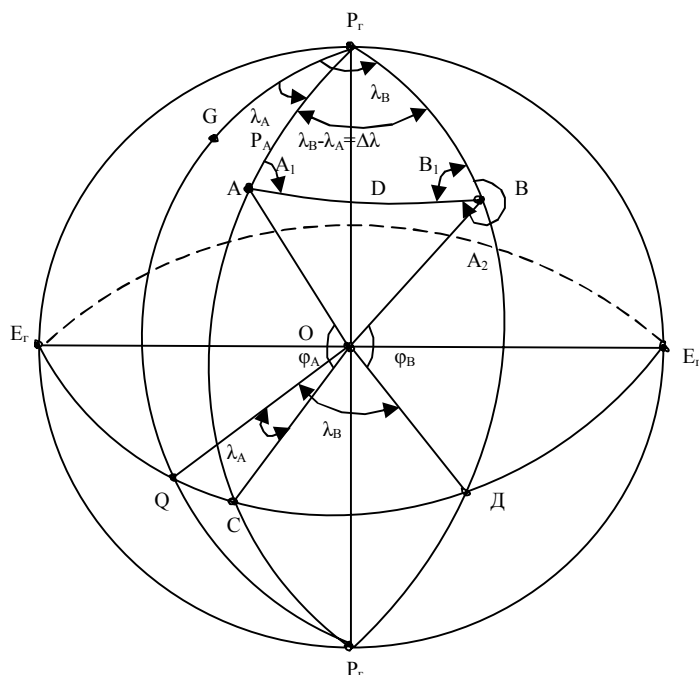


Рис.3. Координати станцій А і В на земній кулі.

Спостереження елементів земного магнетизму проведено в точці А, положення якої на земній кулі у сферичних координатах однозначно задається географічною довготою λ_A і географічною широтою φ_A (див. рис.1). положення точки В на земній кулі визначається довготою λ_B , де λ – це двограний кут між площиною початкового Гринвіцького меридіану і меридіану точки спостереження (у нас $P_r G Q P_r$ – початковий меридіан, $P_r A C P_r$ – меридіан точки А, $P_r B D P_r$ – меридіан точки В). На рис.1 $E_r Q C D E_r$ – географічний екватор.

Визначення віддалі і азимута між двома точками, заданими координатами, називається оберненою геодезичною задачею. Розробимо методику рішення головної оберненої геодезичної задачі.

Розглянемо сферичний трикутник $P_r A B$. Відомими елементами буде різниця довгот

$$\Delta\lambda = \lambda_B - \lambda_A \quad (2.1)$$

і полюсні віддалі

$$P_A = 90^\circ - \varphi_A, \quad (2.2)$$

$$P_B = 90^\circ - \varphi_B. \quad (2.3)$$

Необхідно визначити географічний азимут A_1 (кут між напрямком географічного меридіану точки спостереження А до напрямку АВ, в якому знаходиться станція спостереження В), а також віддаль $AB = D$.

Скориставшись формулою косинуса сторони сферичного трикутника, запишемо

$$\cos D = \cos P_A \cos P_B + \sin P_A \sin P_B \cos \Delta\lambda \quad (2.4)$$

Координати станції спостереження в точці А (Рівне)

$$\varphi_A = 50^\circ 35'; \quad \lambda_A = 26^\circ 07,5'.$$

Координати станції спостереження в точці В (Київ)

$$\varphi_B = 50^\circ 27'; \quad \lambda_B = 30^\circ 30,0'.$$

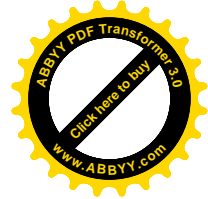
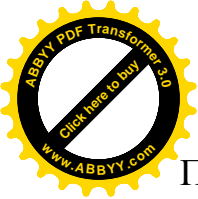
Різниця довгот при цьому буде

$$\Delta\lambda = 30^\circ 30,0' - 26^\circ 07,5' = 4^\circ 22,5',$$

а полярні віддалі

$$P_A = 90^\circ - 50^\circ 35' = 39^\circ 25',$$

$$P_B = 90^\circ - 50^\circ 27' = 39^\circ 33'.$$



Приведемо формулу (4) до робочого вигляду
 $D = \arccos[\cos P_A \cos P_B + \sin P_A \sin P_B \cos \Delta \lambda]. (2.5)$

У загальному вигляді формула розрахунку віддалі на поверхні земної кулі буде:

$$D = K \arccos[\cos P_A \cos P_B + \sin P_A \sin P_B \cos \Delta \lambda]. (2.6)$$

Астрономи виражають D в годинах. При цьому $K=15$. геодезисти і геофізики виражають D в кілометрах. Тоді $K=111,13$ км. В математиці при рішенні задач сферичної тригонометрії віддаль D визначається в кутовій мірі і $K=1$.

В нашому випадку:

$$D = 111,13 \arccos[\cos P_A \cos P_B + \sin P_A \sin P_B \cos \Delta \lambda]. (2.7)$$

Тоді

$$D = 111,13 \arccos[\cos 39^\circ 25' \cos 39^\circ 33' + \sin 39^\circ 25' \sin 39^\circ 33' \cos 4^\circ 22,5'] = 309,4579292$$

$$\text{км.} = 309457,9292 \text{ м.}$$

При безпосередньому представленні широт (без попереднього розрахунку полюсних віддалей) формули (5,6 і 7) будуть:

$$D = \arccos[\sin \varphi_A \sin \varphi_B + \cos \varphi_A \cos \varphi_B \cos \Delta \lambda]. (2.8)$$

$$D = K \arccos[\sin \varphi_A \sin \varphi_B + \cos \varphi_A \cos \varphi_B \cos \Delta \lambda]. (2.9)$$

$$D = 111,13 \text{ км.} \arccos[\sin \varphi_A \sin \varphi_B + \cos \varphi_A \cos \varphi_B \cos \Delta \lambda]. (2.10)$$

На основі теореми синусів запишемо

$$\frac{\sin A_1}{\sin P_B} = \frac{\sin \Delta \lambda}{\sin D},$$

або

$$\sin A_1 = \frac{\sin P_B \sin \Delta \lambda}{\sin D}. (2.11)$$

Таким чином, азимут A_1 можна розрахувати за формулою:

$$A_1' = \arcsin\left[\frac{\sin P_B \sin \Delta \lambda}{\sin D}\right], (2.12)$$

де віддаль D необхідно виразити в кутовій мірі, тобто

$$D^\circ = \frac{D_{\text{км}}}{111,13}. (2.13)$$

В нашому випадку

$$D^\circ = \frac{309,4579292_{\text{км}}}{111,13_{\text{км}}} = 2,784647973^\circ = 2^\circ 47'$$

Тоді

$$A_1' = \arcsin\left[\frac{\sin 39^\circ 33' \sin 4^\circ 22,5'}{\sin 2,784647973^\circ}\right] = 88,94593678^\circ = 88^\circ 56' 45''.$$

При представленні полярної віддалі P_B через широту, формула (12) набуде вигляду

$$A_1' = \arcsin\left[\frac{\cos \varphi_B \sin \Delta \lambda}{\sin D}\right]. (2.14)$$

Необхідно відмітити, що по формулам (12) і (14) визначають лише румб азимута, тобто горизонтальний кут між найближчим кінцем



Рис.4 Румб і азимут

У формулах (2.15)-(2.18) індексами 1,2,3,4 позначені четверті у яких знаходиться сторона D (віддалі між точками A і B).

Величина румба характеризується не лише величиною, але і назвою. Так, румб r_1 у першій четверті має назву „північний схід” і позначається Пн.Сх.; румб у другій четверті має назву „південний схід” і позначається Пд.Сх.; румб у третій четверті має назву „південний захід” і позначається Пд.Зх.; румб у четвертій четверті має назву „північний захід” і позначається Пн.Зх..

При розрахунку по формулах (2.15)-(2.18) слід брати розрахований румб по модулю (абсолютній величині) і підставляти у формули (2.15)-(2.18).

Формули переходу від азимутів до румбів мають вигляд:

$$r_1 = A_1; \text{Пн.Сх.} \quad (2.19)$$

$$A_2 \quad r_2 = 180^\circ - A_2; \text{Пд.Сх.} \quad (2.20)$$

$$r_3 = A_3 - 180^\circ; \text{Пд.Зх.} \quad (2.21)$$

$$r_4 = 360^\circ - A_4; \text{Пн.Зх.} \quad (2.22)$$

Приведемо ще одну формулу для визначення азимута

$$A'_1 = \arctg \left[\frac{\sin \Delta \lambda}{\cos \varphi_A \operatorname{tg} \varphi_B - \sin \varphi_A \cos \Delta \lambda} \right] \quad (2.23)$$

І в нашому випадку

$$A'_1 = \arctg \left[\frac{\sin 4^\circ 22,5'}{\cos 50^\circ 35' \operatorname{tg} 50^\circ 27' - \sin 50^\circ 35' \cos 4^\circ 22,5'} \right] =$$

$$= -88,94593669^\circ = -88^\circ 56' 45,5''.$$

Тобто, розрахунки за формулами (2.11) і (2.23) дають

однакові результати, що служить внутрішнім контролем розрахунків. Проаналізуємо результати.

Спочатку розрахуємо різницю широт точок A і B

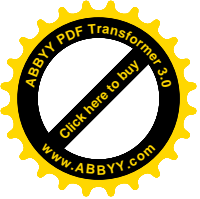
$$\Delta \varphi_{B-A} = \varphi_B - \varphi_A, \quad (2.24)$$

в нашому випадку

$$\Delta \varphi_{B-A} = 50^\circ 27' - 50^\circ 35' = -0^\circ 08'.$$

Тобто, румб визначаємого напрямку має назву „Південний Схід”.

Тому азимут напрямку Рівне-Київ буде:



$$A_1 = 180^\circ - 88^\circ 56' 45,4'' = 91^\circ 03' 14,6''.$$

Знайдемо кут В. За теоремою синусів

$$\frac{\sin B}{\sin P_A} = \frac{\sin A_1}{\sin P_B},$$

звідки

$$\sin B = \frac{\sin P_A \sin A_1}{\sin P_B}, \quad (2.25)$$

$$B = \arcsin \left[\frac{\sin P_A \sin A_1}{\sin P_B} \right], \quad (2.26)$$

або

$$B = \arcsin \left[\frac{\cos \varphi_A \sin A_1}{\cos \varphi_B} \right]. \quad (2.27)$$

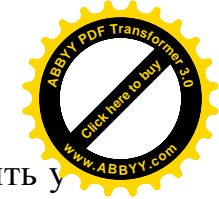
В нашому випадку

$$B = \arcsin \left[\frac{\cos 50^\circ 35' \sin 91^\circ 03' 14,6''}{\cos 50^\circ 27'} \right] = 85,56860597^\circ = 85^\circ 34' 06,98''.$$

Розрахуємо обернений ромб A_2'

$$A_2' = \arctg \left[\frac{\sin \Delta \lambda}{-\cos \varphi_B \operatorname{tg} \varphi_A + \sin \varphi_B \cos \Delta \lambda} \right]. \quad (2.28)$$

$$A_2' = \arctg \left[\frac{\sin 4^\circ 22,5'}{-\cos 50^\circ 27' \operatorname{tg} 50^\circ 35' + \sin 50^\circ 27' \cos 4^\circ 22,5'} \right] = -85,56860413^\circ = -85^\circ 34' 06,97''.$$



Приймаючи до уваги, що обернений румб лежить у четвертій четверті і назва румбу „Північний Захід”, то

$$A_2 = A_2' + 360^\circ = 360^\circ - 85^\circ 34' 06,97'' = 274^\circ 25' 53,03''.$$

Як бачимо, $A_2' = B$, що являється внутрішнім контуром обчислень.

3. ВИЗНАЧЕННЯ КООРДИНАТ СТАНЦІЇ СПОСТЕРЕЖЕННЯ

За відомими координатами пункту А (φ_A, λ_A), довжині сторони сферичного трикутника D і азимуту A_1 необхідно визначити координати φ_B, λ_B станції спостереження. Яка знаходиться в точці В земної кулі, тобто розв'язати пряму головну геодезичну задачу на поверхні Землі (див. рис.1). Розраховується сферична віддаль D° у кутовій мірі [36,-с.33]

$$D^\circ = \frac{D}{K}, \quad (3.1)$$

$$\tau = \text{ctg} D^\circ \cos \varphi_A - \sin \varphi_A \cos A_1, \quad (3.2)$$

$$q = \text{ctg} D^\circ \sin \varphi_A + \cos \varphi_A \cos A_1. \quad (3.3)$$

$$\Delta \lambda = \text{arctg} \left[\frac{\sin A_1}{\tau} \right], \quad (3.4)$$

$$\lambda_B = \lambda_A + \Delta \lambda, \quad (3.5)$$

$$\varphi_2 = \text{arctg} = \left[\frac{q}{\sin A_1 \sin \Delta \lambda + p \cos \Delta \lambda} \right], \quad (3.6)$$

$$A_2 = \text{arctg} \left[\frac{\sin \Delta \lambda}{\sin \varphi_B \cos \Delta \lambda - \text{tg} \varphi_A \cos \varphi_B} \right]. \quad (3.7)$$

І в нашому випадку

$$D^\circ = \frac{309,4579292}{111,13} = 2,784647973^\circ = 2^\circ 47' 04,733''$$

$$\tau = \text{ctg} 2,784647973^\circ \cos 50^\circ 35' - \sin 50^\circ 35' - \sin 50^\circ 35' \cos 91^\circ 03' 14,6'' = 20,55938804 * 0,634955265 - 0,772548905(0,018395702) = 13,06850326,$$

$$q = \text{ctg} 2,784647973^\circ \sin 50^\circ 35' + \cos 50^\circ 35' \cos 91,03' 14,6'' = 20,55938804 * 0,772548905 + 0,634955265 * (-0,018395702) = 15,7145227,$$

$$\Delta \lambda = \text{arctg} \left[\frac{\sin 91^\circ 03' 14,6''}{13,06850326} \right] =$$

$$= 4,375000118^\circ = 4^\circ 22' 50,07'',$$

$$\lambda_B = 26^\circ 07' 30'' + 4^\circ 22' 30,00'' = 30^\circ 30' 00'',$$

$$\varphi_B = \text{arctg} \frac{15,87145272}{\sin 91^\circ 03' 14,6'' \sin 4^\circ 22,5' + 13,06850326 \cos 4^\circ 22,5'} = 50,45000051^\circ = 50^\circ 27' 00,00''.$$

Контроль розрахунку широти φ_2 виконаємо за формулою

$$\cos P_B = \cos P_A \cos D + \sin P_A \sin D \cos A_1, \quad (3.8)$$

$$\sin \varphi_B = \sin \varphi_A \cos D + \cos \varphi_A \sin D \cos A_1, \quad (3.9)$$

і

$$\varphi_B = \arcsin [\sin \varphi_A \cos D + \cos \varphi_A \sin D \cos A_1]. \quad (3.10)$$

В нашому випадку

$$\varphi_B = \arcsin \left[\sin 50^\circ 35' \cos 2,784647973^\circ + \cos 50^\circ 35' * \right. \\ \left. * \sin 2,784647973^\circ \cos 91^\circ 03' 14,6'' \right] = 50,45000038^\circ = 50^\circ 27' 00,00''.$$

Таким чином, розрахунки за формулами (3.6) і (3.10) приводять до однакових результатів, що і буде внутрішнім контролем розрахунків. Зовнішнім контролем вірності теоретичних викладок буде порівняння широти і довготи з відомою: $\varphi_B = 50^\circ 27' 00,00''$ і $\lambda_B = 30^\circ 30' 00''$.

Обернений азимут розраховується за формулою (3.8)

$$A_2' = \arctg \left[\frac{\sin 4,375000178^\circ}{\sin 50^\circ 27' \cos 4,375000178^\circ - \operatorname{tg} 50^\circ 35' \cos 50^\circ 27'} \right] = -85,56860417^\circ = -85^\circ 34' 06,98'',$$

Переходячи від румба A_2' до азимута, отримаємо

$$A_2 = 360^\circ - A_2' = 274^\circ 25' 53,02''.$$

Контрольне значення оберненого азимута

$$A_2 = 274^\circ 25' 53,02''.$$

Нам невідома література в якій встановлювався δ функціональний зв'язок між географічною і геомагнітною системами координат.

В даній роботі ця проблема вирішена не лише в теоретичному аспекті, але розроблена методично і ілюстроване практично. Вона готова для практичного використання і може бути корисною для студентів і аспірантів відповідного профілю. Геофізики і геодезисти можуть використовувати її в своїй практичній діяльності.

4. ВСТАНОВЛЕННЯ ЗАЛЕЖНОСТІ МІЖ КУТОМ НАХИЛУ МАГНІТНОЇ СТІЛКИ І ГЕОМАГНІТНОЮ ШИРОТОЮ ПУНКТУ СПОСТЕРЕЖЕНЬ.

Існує функціональна залежність між кутом нахилу магнітної стрілки ν і співвідношення складових індукцій в пункті спостережень

$$\operatorname{tg} \nu = \frac{B_z}{B_h}, \quad (4.1)$$

де B_z – вертикальна складова індукції геомагнітного поля в пункті спостережень;

B_H – горизонтальна складова індукції.

Представимо формулу (4.1) у вигляді

$$\nu = \arctg \left[\frac{B_z}{B_H} \right]. \quad (4.2)$$

З другої сторони, існує залежність φ_{mag} і співвідношенням складових індукції в пункті спостережень

$$\operatorname{tg} \varphi_m = \frac{B_z}{2 B_H}. \quad (4.3)$$

Представимо формулу (4.3) у вигляді

$$\varphi_M = \arctg \left[\frac{B_z}{2 B_H} \right]. \quad (4.4)$$

Подамо формулу (4.3) у вигляді

$$2 \operatorname{tg} \varphi_M = \frac{B_Z}{B_H}. \quad (4.5)$$

Аналізуючи формули (4.1) і (4.5) помітимо, що праві частини даних формул однакові, що дає нам право прирівняти ліві частини.

$$\operatorname{tg} \nu = 2 \operatorname{tg} \varphi_M. \quad (4.6)$$

Тоді, отримаємо

$$\nu = \operatorname{arctg}[2 \operatorname{tg} \varphi_M] \quad (4.7)$$

і

$$\operatorname{tg} \varphi_M = \frac{1}{2} \operatorname{tg} \nu, \quad (4.8)$$

або

$$\varphi_M = \operatorname{arctg}[0,5 \operatorname{tg} \nu] \quad (4.9)$$

Формули (4.7) і (4.8) встановлюють функціональну залежність між кутом нахилу магнітної стрічки ν на пункті спостережень і геомагнітною широтою $\varphi_{\text{маг}}$ даного пункту.

Так, наприклад, при магнітній широті пункту спостережень $\varphi_M = 43^\circ 08,5'$, магнітна стрілка повинна нахилитися на кут

$$\nu = \operatorname{arctg}[2 \operatorname{tg} 43^\circ 08,5'] = 61,9185885^\circ = 61^\circ 55' 06,92''$$

Кут нахилу магнітної стрілки визначають за допомогою приладу, який називається інклінометром. Інклінометр являє собою магнітну стрілку, що вільно обертається навколо горизонтальної осі.

Нам невідома література в якій встановлювались би функціональна залежність між кутом нахилу

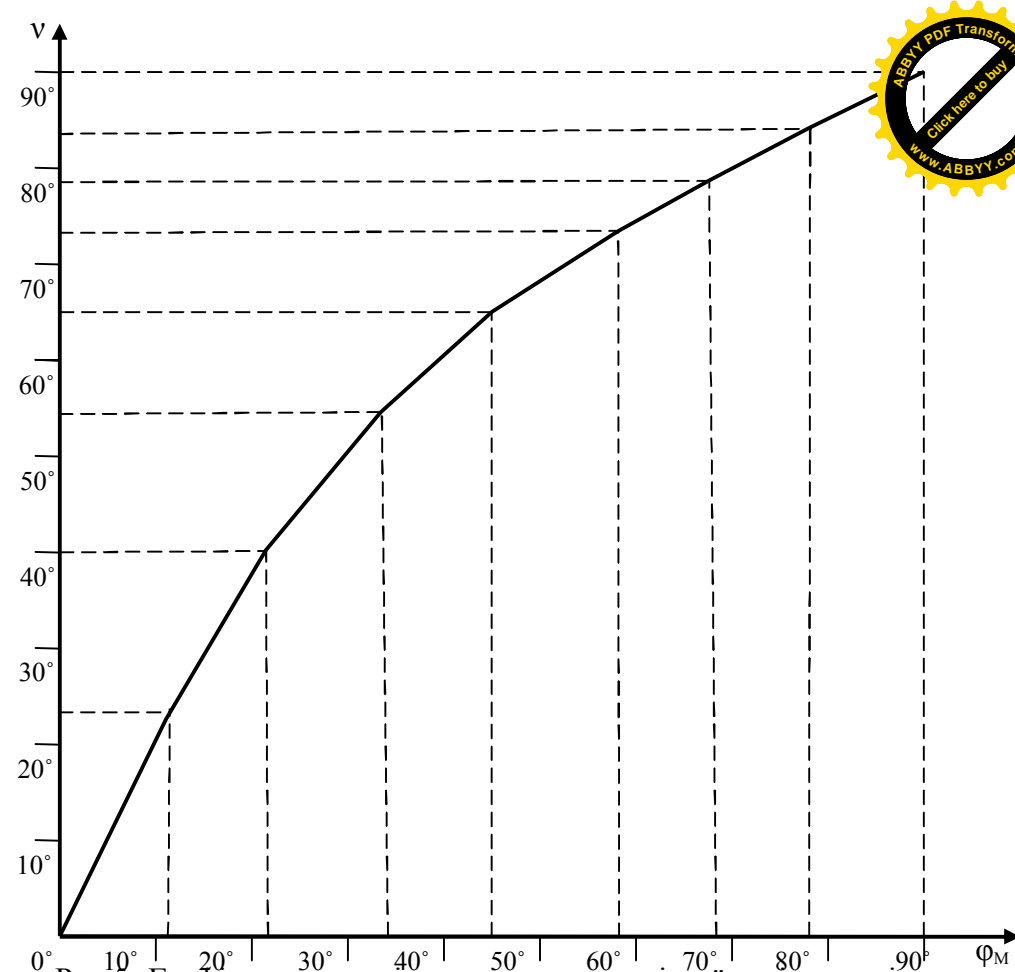


Рис. 5. Графік залежності кута нахилу магнітної стрічки ν від геомагнітної широти пункту спостережень $\varphi_{\text{маг}}$.

магнітної стрілки і геомагнітною широтою пункту спостережень.

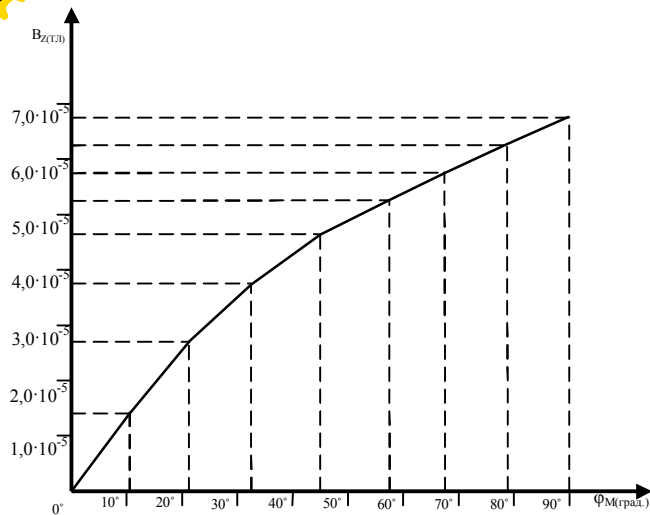


Рис.6. Графік залежності вертикальної складової B_z індукції магнітного поля Землі від геомагнітної широти Φ_M .

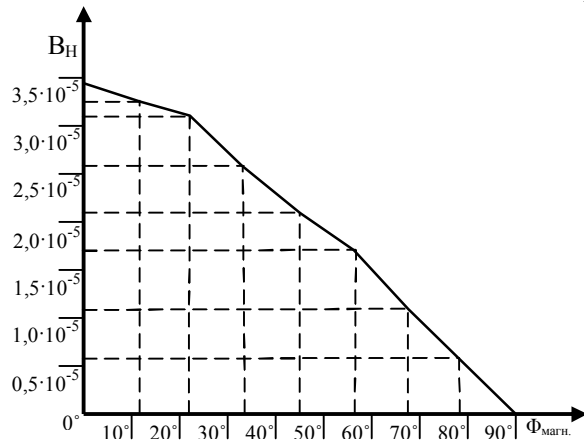


Рис.7. Графік залежності горизонтальної складової B_H індукції магнітного поля Землі від геомагнітної широти Φ_M .

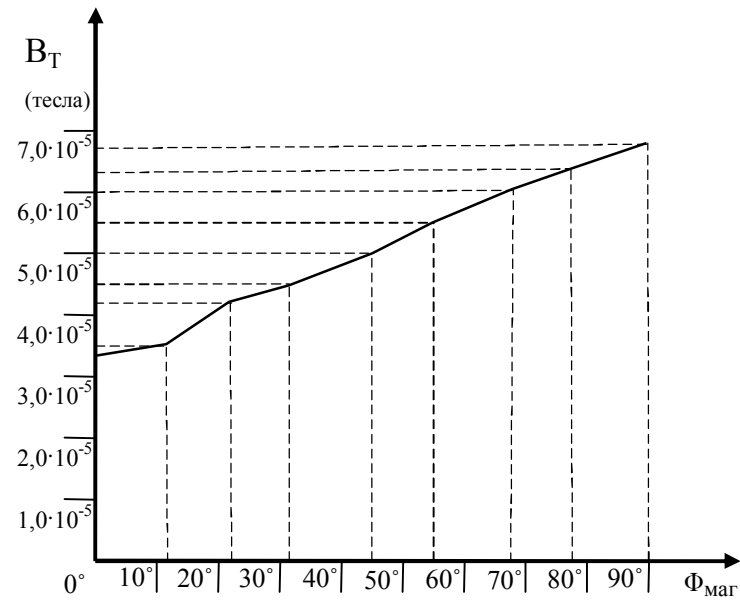


Рис.8. Графік залежності індукції B магнітного поля Землі від геомагнітної широти Φ_M .

5. АПРОКСИМАЦІЯ ЗАЛЕЖНОСТІ ВЕРТИКАЛЬНОЇ СКЛАДОВОЇ B_z ІНДУКЦІЇ МАГНІТНОГО ПОЛЯ ЗЕМЛІ ВІД ГЕОМАГНІТНОЇ ШИРОТИ

Для виводу формули залежності вертикальної складової магнітного поля Землі від геомагнітної широти скористаємося методикою, розробленою у [17].

Побудувавши графік, приходимо до висновку, що емпіричну функцію слід шукати у вигляді

$$B_z = a + b\varphi + c\varphi^2, \quad (5.1)$$

де a , b і c невідомі коефіцієнти, які необхідно визначити і φ значення магнітної широти, на якій визначають B_z , виражена в градусах і долях градуса. В загальному вигляді:

$$y' = a + bx + cx^2. \quad (5.2)$$

Приведемо зведену таблицю апроксимації.

Таблиця 1.

№ п/п	$\varphi_{\text{маг}}=x$ (градуси)	$B_z(\text{тесла})=y$	Проц. $5x^2$ $y' = a + bx + cx^2$	$V_i=y-y'$	V_i^2
1	0,00	0	$0,055 \cdot 10^{-5}$	-0,055	0,003025
2	11,248	$1,346 \cdot 10^{-5}$	1,383	-0,037	0,001369
3	22,4955	$2,686 \cdot 10^{-5}$	2,563	+0,123	0,015129
4	33,7527	$3,662 \cdot 10^{-5}$	3,594	+0,068	0,004624
5	45,000	$4,484 \cdot 10^{-5}$	4,476	+0,008	0,000064
6	56,2536	$5,158 \cdot 10^{-5}$	5,195	-0,037	0,001369
7	67,5046	$5,694 \cdot 10^{-5}$	5,794	-0,100	0,01
8	78,7525	$6,075 \cdot 10^{-5}$	6,230	-0,055	0,003025

9	90	$6,617 \cdot 10^{-5}$	6,517	+0,100	0,01
			$\Sigma = 35,807$	+0,015	$\Sigma = 0,048605$

Середнє значення $B_z = [35,807/9] \cdot 10^{-5} = [3,9785] \cdot 10^{-5}$ тл.

Апроксимацію проведемо по способу найменших квадратів, вимагаючи мінімального відхилення квадратів V_i^2 розходжень результатів, розрахованих за отриманою формулою y' і значеннями y_i , при введенням у таблиці.

При цьому нам необхідно рішити систему нормальних рівнянь:

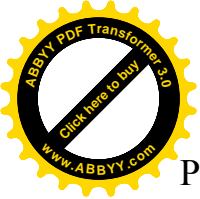
$$\begin{aligned} an + b \sum_{i=1}^n X_i + c \sum_{i=1}^n X_i^2 &= \sum_{i=1}^n Y_i, \\ a \sum_{i=1}^n X_i + b \sum_{i=1}^n X_i^2 + c \sum_{i=1}^n X_i^3 &= \sum_{i=1}^n X_i Y_i, \\ a \sum_{i=1}^n X_i^2 + b \sum_{i=1}^n X_i^3 + c \sum_{i=1}^n X_i^4 &= \sum_{i=1}^n X_i^2 Y_i. \end{aligned} \quad (5.3)$$

Розв'язавши дану систему нормальних рівнянь,, були отримані слідуєчи значення шуканих коефіцієнтів a , b і c

$a=0,054983643$; $b=0,124694863$; $c=-0,000587725$.

Таким чином, нами отримана форма розрахунку вертикальної складової індукції геомагнітного поля Землі від геомагнітної широти

$$B_z = [0,05498 + 0,12469\varphi_m - 0,00059\varphi_m^2] \cdot 10^{-5} \text{ тл.} \quad (5.4)$$



Результати апроксимації приведені в таблиці 1 виразом $y' = a + bx + cx^2$. При цьому в розрахунках були взяті всі знаки у коефіцієнтах a , b і c .

Приведемо оцінку точності розрахунків по виведеній нами формулі (.4).

Середня квадратна похибка розрахунку B_z за формулою (.4) буде

$$m_{B_z} = \sqrt{\frac{\sum V_i^2}{n-1}} = \sqrt{\frac{0,048605}{8}} \cdot 10^{-5} = 0,078 \cdot 10^{-5} = 7,8 \cdot 10^{-7} \text{ тесла}$$

Гранична похибка складає

$$\Delta_{cp.} = 3m_{B_z} = 2,34 \cdot 10^{-6} \text{ Тл.}$$

Відносна похибка розрахунків за формулою (.4) буде

$$\Delta_{відн} = m_{B_z} / B_{ZCP} = 7,8 \cdot 10^{-7} / 3,9785 \cdot 10^{-5} = 0,0196 = \frac{1}{50}.$$

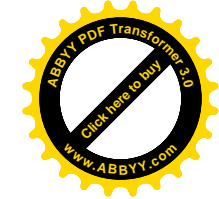
Або в процентах

$$\Delta\% = \Delta_{відн} \cdot 100\% = 2\%.$$

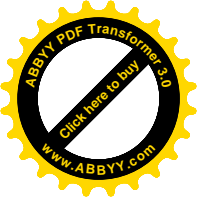
Апроксимація виконана за програмою $[5x^2]$ програмованого мікрокалькулятора CITIZEN SRP-350.

Інструкція

1. Натиснувши клавішу `made`, входимо в меню програм.
2. Вибираємо програму `1STAT`, підводячи курсор.
3. Натискуємо клавішу `Enter`, входячи в підменю програм.
4. Вибираємо програму `2 reg` і натискаємо клавішу `Enter`.



5. Підводимо курсор під програму $[5x^2]$.
6. Натискуємо клавішу `Enter`.
7. Натискуємо клавішу `data`, і із трьох опцій меню вибираємо `DATA-INPUT`.
8. Натискуємо клавішу `Enter`.
9. Попарно набираємо параметри $X_i \downarrow Y_i$, натискаючи курсор \downarrow (сторінку вниз) для набору нового параметра.
10. Набравши всі параметри, натискуємо клавішу `2nd` і потім клавішу `statvar`.
11. Програма виконується автоматично і через декілька секунд будуть готові результати.
12. Підводячи курсор під знак Y , натискуємо `Enter` і набираємо факторні дані X_i і зчитуємо розрахункові дані для контролю Y_i .



6. АПРКСИМАЦІЯ ЗАЛЕЖНОСТІ ГОРИЗОНТАЛЬНОЇ СКЛАДОВОЇ ІНДУКЦІЇ МАГНІТНОГО ПОЛЯ ЗЕМЛІ ВІД ГЕОМАГНІТНОЇ ШИРОТИ.

По тій же методиці апроксимуємо залежність горизонтальної складової індукції магнітного поля Землі від геомагнітної широти.

Таблиця 2.

№ п/п	$\varphi_M = X$ градуси	$y = B_{H(Tл)}$	$y' = a + bx + cx^2$	$V = y - y'$	V^2
1	0	$3,409 \cdot 10^{-5}$	$3,536 \cdot 10^{-5}$	-0,127	0,016129
2	11,25	3,384	3,331	+0,053	0,002809
3	22,5	3,243	3,056	+0,187	0,034969
4	33,75	2,740	2,711	+0,029	0,000841
5	45	2,242	2,295	-0,053	0,0002809
6	56,25	1,723	1,808	-0,085	0,007225
7	67,5	1,179	1,250	-0,071	0,005041
8	78,75	0,614	0,622	-0,008	0,000064
9	90	0	-0,076	+0,076	0,005776
	Σ	$18,534 \cdot 10^{-5}$		$\Sigma 0,001$	$\Sigma 0,075663$

В результаті розрахунків отримані значення коефіцієнтів

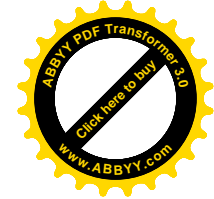
$a=3,535612121$; $b=-0,015008119$; $c=-0,000279186$.

і формула має вигляд

$$B_H' = 3,535612121 - 0,015008119 \varphi_M - 0,000279186 \varphi_M^2. \quad (6.1)$$

Середня квадратна похибка розрахунку за формулою буде:

$$m_{B_H} = \sqrt{\frac{\Sigma V^2}{n-1}} = \sqrt{\frac{0,075663}{8}} \cdot 10^{-5} =$$
$$= 0,097 \cdot 10^{-5} Tл = 9,7 \cdot 10^{-7} Tл$$



Гранична похибка

$$\Delta_{гр.} = 3m_{B_H} = 2,91 \cdot 10^{-6} Tл.$$

Відносна похибка

$$\Delta_{відн.} = \frac{m_{B_H}}{B_{Hcp}} = \frac{2,91 \cdot 10^{-6}}{\frac{18,534 \cdot 10^{-5}}{9}} = 1,413 \cdot 10^{-1}.$$

$$\Delta_{відн.} \% = \Delta_{відн.} \cdot 100 \% = 14,13 \%$$

7. АПРОКСИМАЦІЯ ЗАЛЕЖНОСТІ ІНДУКЦІЇ ПОЛЯ ОДНОРІДНОГО НАМАГНІЧУВАННЯ ЗЕМНОЇ КУЛІ ВІД ГЕОМАГНІТНОЇ ШИРОТИ

Аналогічно проведена апроксимація і отримана формула для розрахунку індукції B_T магнітного поля Землі від широти.

Таблиця 3

№ п/п	$\varphi_M = X$ градуси	$y = B_{H(Tл)}$	$y' = a + bx + cx^2$ (градуси)	$V = y - y'$	V^2
1	0	$3,409 \cdot 10^{-5}$	$3,342 \cdot 10^{-5}$	$+0,067 \cdot 10^{-5}$	0,004489
2	11,25	3,642	3,759	-0,117	0,013689
3	22,5	4,211	4,175	+0,036	0,001296
4	33,75	4,574	4,588	-0,014	0,00196
5	45	5,013	4,999	+0,014	0,000196
6	56,25	5,438	5,408	+0,030	0,0009
7	67,5	5,815	5,814	+0,001	0,000001
8	78,75	6,206	6,219	-0,013	0,000169
9	90	6,617	6,621	-0,004	0,000016
				$\Sigma 0$	$\Sigma 0,020952$

Встановлені коефіцієнти апроксимуючої функції
 $a = 3,341751515$; $b = 0,037214276$; $c = -8,62 \cdot 10^{-6}$.

Загальна формула переходу має вигляд

$$B_T = 3,341751515 + 0,037214276 \varphi_M - 8,62 \cdot 10^{-6} \varphi_M^2. \quad (7.1)$$

Середня квадратична похибка m_{B_T} розрахунку за формулою

$$m_{B_T} = \sqrt{\frac{\Sigma V^2}{n-1}} = \sqrt{\frac{0,020959}{8}} = 0,0511 \cdot 10^{-5} Tл = 5,11 \cdot 10^{-7} Tл.$$

Гранична похибка:

$$\Delta_{cp.} = 3m_{B_T} = 3 \cdot 5,11 \cdot 10^{-7} = 1,53 \cdot 10^{-6} Tл.$$

Відносна похибка:

$$\Delta_{відн.} = \frac{m_{B_T}}{B_{Tcp.}} = \frac{1,53 \cdot 10^{-6}}{4,99 \cdot 10^{-5}} = 0,03066 = \frac{1}{32} Tл.$$

Відносна похибка в %:

$$\Delta_{відн.} \% = \Delta_{відн.} \cdot 100\% = 3,06\%.$$

8. АПРОКСИМАЦІЯ ЗАЛЕЖНОСТІ МАГНІТНОГО МОМЕНТУ ЗЕМНОЇ КУЛІ ВІД ШИРОТИ

Побудувавши графік залежності магнітного моменту від широти, приходимо до висновку, що емпіричну функцію слід шукати у вигляді

$$M = \alpha_3 \varphi_m^3 + \alpha_2 \varphi_m^2 + \alpha_1 \varphi_m + \alpha_0. \quad (8.1)$$

При розробці програми на мікроЕОМ прийемо до уваги рівномірне розташування вузлів апроксимації і представимо факторний аргумент у вигляді

$$Z = \varphi - \varphi_C = \varphi - (\varphi_0 - \varphi_n) / 2. \quad (8.2)$$

В даному випадку формула (8.1) буде

$$M(Z) = \alpha_3 Z^3 + \alpha_2 Z^2 + \alpha_1 Z + \alpha_0, \quad (8.3)$$

де $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, – невідомі коефіцієнти, які необхідно визначити по способу найменших квадратів.

Програма розрахована на апроксимацію функції $M(\varphi)$ з довільним числом $m > 3$ рівно відстояних вузлів $\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_n$.

Необхідно рішити систему нормальних рівнянь

$$\begin{bmatrix} m & \sum_{i=1}^m Z_i & \sum_{i=1}^m Z_i^2 & \sum_{i=1}^m Z_i^3 \\ \sum_{i=1}^m Z_i & \sum_{i=1}^m Z_i^2 & \sum_{i=1}^m Z_i^3 & \sum_{i=1}^m Z_i^4 \\ \sum_{i=1}^m Z_i^2 & \sum_{i=1}^m Z_i^3 & \sum_{i=1}^m Z_i^4 & \sum_{i=1}^m Z_i^5 \\ \sum_{i=1}^m Z_i^3 & \sum_{i=1}^m Z_i^4 & \sum_{i=1}^m Z_i^5 & \sum_{i=1}^m Z_i^6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n \int_i \\ \sum_{i=1}^n \int_i Z_i \\ \sum_{i=1}^n \int_i Z_i^2 \\ \sum_{i=1}^n \int_i Z_i^3 \end{bmatrix}$$

Приведемо зведену таблицю результатів апроксимації

Таблиця 4

№ п/п	$\varphi_{\text{магн}}$ = Z градуси	$M(Z)(a \cdot M^2)$	$M(Z)_{\text{апрокс.}}$	$V = M - M'$	V^2
1	0,00	$8,79 \cdot 10^{22}$	$8,803 \cdot 10^{22}$	-0,013	0,000169
2	11,25	$8,90 \cdot 10^{22}$	$8,957 \cdot 10^{22}$	-0,057	0,003249
3	22,50	$9,05 \cdot 10^{22}$	$8,851 \cdot 10^{22}$	+0,199	0,039601
4	33,75	$8,50 \cdot 10^{22}$	$8,588 \cdot 10^{22}$	-0,088	0,007744
5	45,00	$8,17 \cdot 10^{22}$	$8,274 \cdot 10^{22}$	-0,094	0,008836
6	56,25	$8,00 \cdot 10^{22}$	$8,011 \cdot 10^{22}$	-0,011	0,000121
7	67,50	$7,95 \cdot 10^{22}$	$7,904 \cdot 10^{22}$	+0,046	0,002116
8	78,75	$8,12 \cdot 10^{22}$	$8,057 \cdot 10^{22}$	+0,063	0,003969
9	90,00	$8,53 \cdot 10^{22}$	$8,575 \cdot 10^{22}$	-0,045	0,002025
		$76,02 \cdot 10^{22}$		0	0,06783

Отримана формула має вигляд (8.4)

$$M = 1,2190 \cdot 10^{-5} \varphi_M^3 - 1,4404 \cdot 10^{-3} \varphi_M^2 + 2,8370 \cdot 10^{-2} \varphi_M + 8,8028.$$

Середня квадратична похибка визначення магнітного моменту Землі за формулою буде

$$m_M = \sqrt{\frac{\sum V^2}{n-1}} = \sqrt{\frac{0,06783}{8}} \cdot 10^{22} = 0,09 \cdot 10^{22} \text{ а.м.}$$

Гранична похибка:

$$\Delta_{\text{гр}} = 3m_M = 3 \cdot 0,09 \cdot 10^{22} = 2,7 \cdot 10^{21} \text{ а.м.}$$

Відносна похибка:

$$\Delta_{\text{відн.}} = \frac{m_M}{M_{\text{середн.}}} = \frac{0,09 \cdot 10^{22}}{76,02 \cdot 10^{22}} = 0,011.$$

Відносна похибка у відсотках:

$$\Delta_{\text{відн.}} \% = \Delta_{\text{відн.}} \cdot 100\% = 1,1\%.$$

9. ДОСЛІДЖЕННЯ ЗАЛЕЖНОСТІ СИЛИ СТРУМУ ТАНГЕНЦІОНАЛЬНОО ГАЛЬВАНОМЕТРА ВІД ШИРОТИ ПУНКТУ СПОСТЕРЕЖЕННЯ

Дослідимо залежність сили струму тангенціального гальванометра від широти пункту спостереження при визначенні горизонтальної складової геомагнітного поля Землі.

Раніше нами була отримана формула на основі закону Біо-Савара-Лапласа

$$B_r = \frac{\mu_0 IN}{2R \operatorname{tg} \alpha}. \quad (9.1)$$

Знайдемо величини силу струму I:

$$I = \frac{2B_r R \operatorname{tg} \alpha}{\mu_0 N}. \quad (9.2)$$

За формулою (9.2) розрахуємо значення I для горизонтальної складової B_r на різних широтах земної кулі для нормального магнітного поля Землі. В подальшому виразимо силу струму як функцію геомагнітної широти. Для цього нам необхідно підібрати апроксимуючу функцію в залежності від графіка цієї залежності.

Таблиця 5.

№ п/п	φ_m градуси	B_H (Тл)	I (а)	$I = a + b\varphi_{(a)} + c\varphi^2$	$V = I - I'$	V^2
1	0	$3,409 \cdot 10^{-5}$	1,158	1,201	-0,043	0,001849
2	11,25	3,384	1,149	1,132	+0,017	0,000289
3	22,5	3,243	1,102	1,038	+0,064	0,004096
4	33,75	2,740	0,931	0,921	+0,01	0,0001
5	45	2,242	0,762	0,780	-0,018	0,000324

6	56,25	1,723	0,585	0,614	-0,029	0,000841
7	67,5	1,179	0,400	0,425	-0,025	0,000625
8	78,75	0,614	0,208	0,211	-0,003	$9 \cdot 10^{-6}$
9	90	$1 \cdot 10^{-9}$	0	-0,026	+0,026	0,000676
					$\Sigma -0,001$	$\Sigma 0,008809$

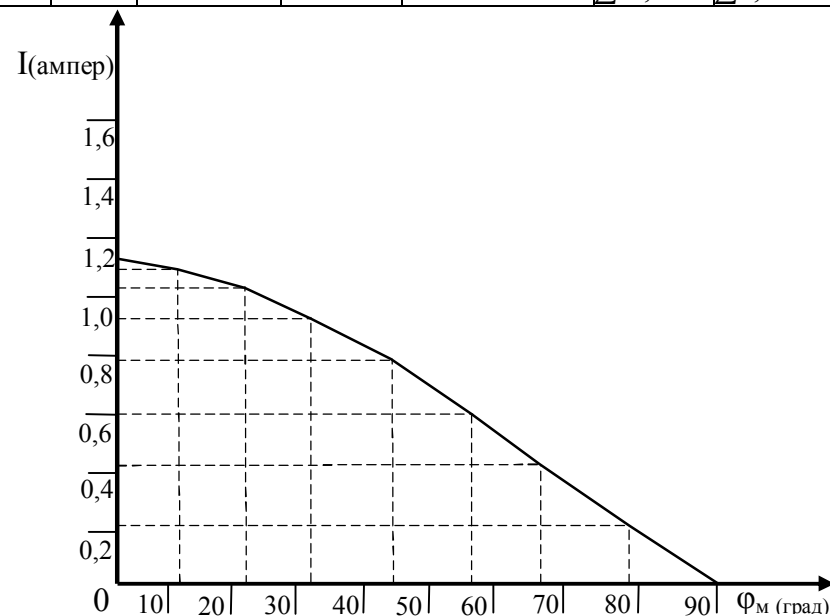


Рис.9. Графік залежності сили струму при визначенні горизонтальної складової індукції магнітного поля Землі від геомагнітної широти пунктів спостережень
 $a=1,200939394$; $b=-0,00509062$; $c=-0,00009496$.

Для нашої рамки, яка складається із $N=5$ витків радіуса $R=0,107$ м, приймаючи до уваги, що коефіцієнт магнітної проникливості $\mu_0=1,26 \cdot 10^{-6}$ Гн/м, на кожній широті спостереження будемо добиватися відхилення магнітної стрілки на $\alpha=45^\circ$, регулюючи потенціометром і повзунком реостата. При цьому

$$I = \frac{2 \cdot B_z \cdot 0,107 \operatorname{tg} 45^\circ}{1,26 \cdot 10^{-6} \cdot 5} \left[\frac{\kappa_z}{c^2 a} \cdot \frac{c^2 a^2 M}{M \cdot \kappa_z} \right], \quad (9.3)$$

або

$$I = 33968,25397 \cdot B_H(a), \quad (9.4)$$

За формулою (3) розрахуємо значення сили струму I в залежності від значення B_H , що відповідає певній геомагнітній широті станції спостереження і впишемо в таблицю 1.

По приведеній вище методиці апроксимуємо залежність сили струму від широти для фіксованого відхилення магнітної стрілки.

Емпіричну формулу будемо шукати у вигляді

$$I' = a + b\varphi_m + c\varphi_m^2. \quad (9.5)$$

В результаті апроксимації отриманні значення коефіцієнтів:

$a=1,200939394$; $b=-0,00509062$; $c=-0,00009496$.

Тобто, шукана формула має вигляд

$$I' = 1,200939394 - 0,00509062\varphi_m - 0,00009496\varphi_m^2, \quad (9.6)$$

або для практичного використання

$$I' = 1,2 - 5,1 \cdot 10^{-3} \varphi_m - 1,0 \cdot 10^{-4} \varphi_m^2. \quad (9.7)$$

За формулою (9.6) були розраховані значення сили струму для вузлових значень широт, приведених у таблиці 1.

Середня квадратична похибка розрахунку сили струму для відповідної широти складає

$$m_I = \sqrt{\frac{\Sigma V^2}{n-1}} = \sqrt{\frac{0,008809}{8}} = 0,033 \text{ а.м.}$$

Звичайно, щоб використати дану методику для визначення геомагнітної широти за зміною сили струму приладу при фіксованому куті повороту магнітної стрілки, необхідно підвищити чутливість приладу на порядок.

В подальшому зафіксуємо силу струму, наприклад на величині 0,5 ампер і знайдемо кут повороту α стрілки на кожній із широт станцій спостереження.

Представимо формулу (9.2) у вигляді

$$\alpha = \operatorname{arctg} \left[\frac{I\mu_0 N}{2RB_z} \right], \quad (9.8)$$

або

$$\alpha = \operatorname{arctg} \left[\frac{0,5 \cdot 1 \cdot 26 \cdot 10^{-6} \cdot 5}{2 \cdot 0,107 \cdot B_z} \right] \left[\frac{a \cdot M \cdot \kappa_z}{c^2 a^2} \cdot \frac{1}{M} \cdot \frac{c^2 a}{\kappa_z} \right]. \quad (9.9)$$

тобто

$$\alpha = \operatorname{arctg} \left[\frac{0,00001472}{B_z} \right] (\text{градуси}). \quad (9.10)$$

За формулою (9.6) розрахуємо значення α для вузлових точок спостереження.

Таблиця 6.

№ п/п	φ_m (градуси)	B_H (Тл)	α (градуси)
1	0	$3,409 \cdot 10^{-5}$	0,432
2	11,25	3,384	0,435
3	22,5	3,243	0,454
4	33,75	2,740	0,537
5	45	2,242	0,656

6	56,25	1,723	0,854
7	67,5	1,179	1,248
8	78,75	0,614	2,397
9	90	$1 \cdot 10^{-9}$	89,996

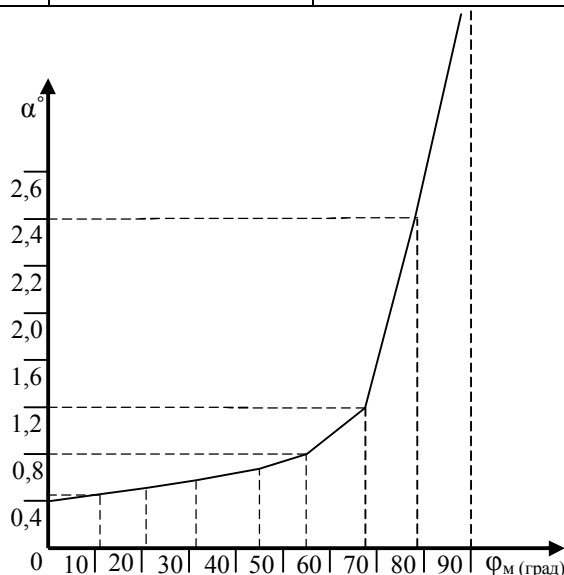


Рис.10. Графік залежності кута повороту α магнітної стрілки при фіксованій силі струму у колі рамки від широти пункту спостереження.

10. ПРЕДСТАВЛЕННЯ ВЕРИКАЛЬНОЇ СКЛАДОВОЇ ІНДУКЦІЇ ГЕОМАГНІТНОГО ПОЛЯ ЗЕМЛІ ЧЕРЕЗ ГОРИЗОНТАЛЬНУ.

Вертикальна складова індукції магнітного поля земної кулі

$$B_z = \mu_0 \frac{M}{2\pi R^3} \sin \varphi_m. \quad (10.1)$$

Горизонтальна складова

$$B_H = \mu_0 \frac{M}{4\pi R^3} \cos \varphi_m, \quad (10.2)$$

де R – радіус земної кулі,
 M – магнітний момент.

З формули (.2) запишемо

$$\mu_0 \frac{M}{2\pi R^3} = 2 B_H. \quad (10.3)$$

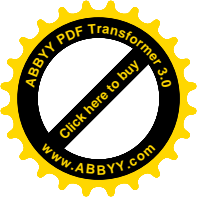
Підставляючи ліву частину виразу (10.3) в (10.1) отримаємо

$$B_z = \frac{2 B_H}{\cos \varphi_m} \sin \varphi_m,$$

або

$$B_z = 2 B_H \operatorname{tg} \varphi_m. \quad (10.4)$$

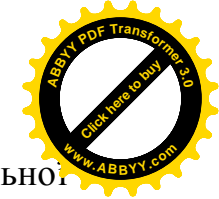
Таким чином, формула функціонального зв'язку між складовими індукції магнітного поля земної кулі вираховується виразом (10.4).



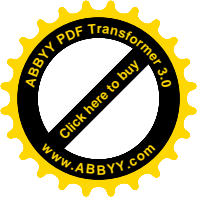
ВИСНОВКИ

На основі проведених в даній роботі теоретичних і практичних досліджень:

1. Встановлена різниця довгот між положенням магнітного полюса Землі і лабораторії м. Рівне $\Delta\lambda = 126^\circ 30,5'$.
2. Виведена формула для розрахунку полярної віддалі P' будь-якої точки спостереження на земній кулі.
3. Отримана формула для визначення постійної складової схилення магнітної стрілки δ для будь-якої точки спостереження на Землі і встановлено, що для нашої лабораторії $\delta = 12^\circ 41' 11,0''$.
4. Виведена формула контролю розрахунку δ .
5. Приведена формула розрахунку кута λ' між напрямком меридіану, що проходить через магнітний і географічний полюси Землі і меридіаном будь-якої точки Землі.
6. Встановлена магнітна широта лабораторії $\varphi_m = 43^\circ 08' 28,7''$ і різниця широт географічної і геомагнітної $\Delta\varphi = 7^\circ 46' 31,3''$.
7. Отримані формули визначення азимута і віддалі між двома станціями спостережень.
8. Встановлені формули визначення координат станції спостереження.
9. Досліджена залежність між кутом нахилу магнітної стрілки і геомагнітною широтою пункту спостережень.

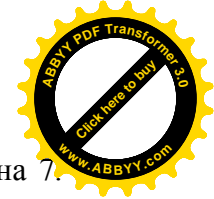


10. Отримана формула залежності вертикальної складової індукції магнітного поля Землі від геомагнітної широти.
11. Проведена апроксимація залежності горизонтальної складової індукції магнітного поля Землі від геомагнітної широти.
12. Апроксимована залежність індукції поля однорідного намагнічування земної кулі від геомагнітної широти.
13. Отримана формула залежності магнітного моменту земної кулі від широти.
14. Досліджена залежність сили струму тангенціального гальванометра від широти пункту спостереження.
15. Представлена вертикальна складова індукції геомагнітного поля Землі через горизонтальну.

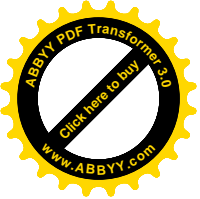


ЛІТЕРАТУРА

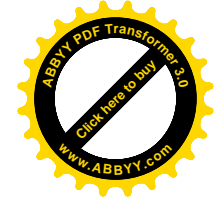
1. Белова Н.А. Курс сферической астрономии. М.: Недра, 1971, -182 с.
2. Біленко І.І. Фізичний словник.-2-е вид., перероб. і доповн.- К.: Вища школа, 1993, - 319 с.
3. Васильєва Л.Д., Медведенко Б.І., Якименко Ю.І. Напівпровідникові прилади: Підручник. - К.:ІВЦ „Видавництво „Політехніка””, 2003, - 388 с.
4. Власов А.Д., Мурин Б.П. Единицы физических величин в науке и технике: Справ очник. - Энергоатомиздат, 1990, - 176 с.
5. Гершунський Б.С. Основы электроники и микроелектроники: Учебник. - 4-е изд. Перероб. и доп. - К.: Вища школа, 1989, - 423 с.
6. Геодезичний енциклопедичний словник. За ред. В. Латинського. Львів, Євро світ, 2001, - 668 с.
7. Детлар А.Д., Яворський В.И. Курс общей физики. - М.: Наука, 1989, - 608 с.
8. Деденко Л.Г., Керженцев В.В. Математическая обработка и оформление результатов эксперимента. М.: МГУ, 1977, - 112 с.
9. Зайдель А.И. Ошибки измерений физических величин. Ленинград,: Наука, 1974, - 108 с.
10. Кабардин О.Ф. Фізика. Справ. Материалы. Учебн. пособ. Для учащихся. М.: Просвещение, 1991, - 367 с.
11. Кошкин Н.И., Ширкевич М.Г. Справ очник по элементарной физике. М.: Наука, 1972, - 255 с.
12. Кучерук І.М., Горбачук І.Т., Луцик П.П. Загальний курс фізики. Т.1.-К.: Техніка, 1999, - 536 с.
13. Кучерук І.М., Горбачук І.Т., Луцик П.П. Загальний курс фізики. Т.2.-К.: Техніка, 2001, - 452 с.
14. Кучерук І.М., Горбачук І.Т., Загальний курс фізики. Т.3.- К.: Техніка, 1999, - 520 с.
15. Літнорович Р.М. Основы математики. Дослідження результатів психолого-педагогічного експерименту



- поліноміальною функцією. Навчальний посібник. Частина 7. МЕНУ, Рівне, 2006, 20 с.
16. Афанасьєва О.М., Бродський Я.С., Павлов О.Л. та інші. Математика. - К.: Вища школа, 2002, - 448 с.
 17. Соколенко О.І. Вища математика. Підручник. -К.: „Академія”, 2003, - 432 с.
 18. Пастушенко С.М. Загальна фізика: механіка: навчальний посібник. - К.: Техніка, 1999, - 520 с.
 19. Пастушенко С.М. Формули і закони загальної фізики: навчальний посібник для студентів ВНЗ. 2-е видання: Діал., 2005, - 268 с.
 20. Почтарьов В.Н., Михлик Б.З. Тайна математической Земли. М.: Педагогіка, 1986, - 112 с.
 21. Мудров В.Н, Кушко В.Л. Методы обработки измерений. М.: Сов. радио, 1976, - 192 с.



Літнарівч Руслан Миколайович
доцент, кандидат технічних наук



ВСТАНОВЛЕННЯ ЗВ'ЯЗКУ МІЖ ГЕОГРАФІЧНОЮ І ГЕОМАГНІТНОЮ СИСТЕМАМИ КООРДИНАТ

Частина 2

Комп'ютерний набір, верстка, редагування і дизайн у
редакторі Microsoft Office 2003: **Штиба Леонід
Васильович.**

Міжнародний Економіко-гуманітарний університет
імені академіка С. Дем'янчука, 4.

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
МІЖНАРОДНИЙ ЕКОНОМІКО-ГУМАНІТАРНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
Ім.акад. С.Дем'янчука

В.В.Гула

**ПОБУДОВА І ДОСЛІДЖЕННЯ
МАТЕМАТИЧНОЇ МОДЕЛІ
ЗАЛЕЖНОСТІ МАГНІТНОГО МОМЕНТУ
ЗЕМЛІ ВІД ШИРОТИ МЕТОДОМ
СТАТИСТИЧНИХ ВИПРОБУВАНЬ МОНТЕ
КАРЛО**

Апроксимація поліномом третього степеня



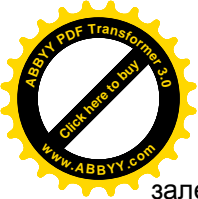
Модель ПГБ10-205

Науковий керівник:
кандидат технічних наук,
доцент Р. М. Літнарович

Рівне – 2010



Гула Василина Василівна



УДК 53. 02:550.38

Гула В.В. Побудова і дослідження математичної моделі залежності магнітного моменту Землі від широти методом статистичних випробувань Монте Карло. Апроксимація поліномом третього степеня. Модель ПГБ10-205.МЕГУ, Рівне, 2010, 62 с.

Рецензент: В. Г.Бурачек, доктор технічних наук, професор

Відповідальний за випуск: Й. В. Джунь, доктор фізико-математичних наук, професор

Книга написана за матеріалами роботи наукової фізико-математичної школи МЕГУ

Встановлюється функціональна залежність магнітного моменту планети Земля від геомагнітної широти. Дається вивід формули у вигляді поліному третього порядку.

Математична модель будується на основі способу найменших квадратів.

Проводиться дослідження точності зрівноважених елементів методом статистичних випробувань Монте Карло.

Для студентів і аспірантів напрямку наук про Землю.

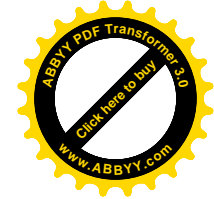
Functional dependence of magnetic moment of planet is set Earth from a geomagnetical breadth. The conclusion of formula is given in a kind to the polynomial of the third order.

A mathematical model is built on the basis of method of leastsquares.

Research of exactness of the balanced elements is conducted by the method of statistical tests of Monte Karlo.

For students and graduate students of direction of sciences about Earth.

© В.В.Гула, 2010



ЗМІСТ

Передмова.....	5
Розділ 1. Геомагнітний момент Землі.....	6
1.1. Представлення геомагнітного моменту поля Землі.....	6
1.2. Представлення істинної моделі.....	12
Розділ 2. Побудова спотвореної моделі.....	14
2.1. Генерування істинних похибок для дослідження математичної моделі методом статистичних випробувань Монте Карло.....	14
2.2. Представлення спотвореної моделі.....	16
Розділ 3. Зрівноваження моделі.....	17
3.1. Представлення системи нормальних рівнянь.....	17
3.2. Встановлення коефіцієнтів нормальних рівнянь.....	18
3.3. Рішення нормальних рівнянь способом Крамера	20
Розділ 4. Оцінка точності.....	26
4.1. Контроль зрівноваження	26
4.2. Оцінка точності параметрів, отриманих із системи нормальних рівнянь	26
Висновки.....	32
Літературні джерела	34
Додатки	36

Передмова

Безумовний науковий і практичний інтерес представляє дослідження геомагнітного поля Землі.

Вивченню природи геомагнітного поля і в наш час приділяється велика увага. Вчені намагаються отримати відповіді на запитання: коли і як зародилося магнітне поле земної кулі? Чому воно існує мільярди років? Як це поле буде змінюватись в майбутньому?

В даній роботі ми зробимо спробу виразити один із основних компонентів геомагнітного поля Землі магнітний момент планети графічно і встановити функціональну залежність магнітного моменту від широти.

Нами підбирається емпірична формула у вигляді поліному третього порядку. Математична модель будується на основі способу найменших квадратів. Побудована ймовірніша модель приймається як істинна модель, на основі якої проводяться дослідження точності методом статистичних випробувань Монте Карло. Генеруються псевдо випадкові числа, які приймаються як істинні похибки, якими спотворюється істинна модель.

В подальшому методом найменших квадратів урівноважується спотворена модель і робиться оцінка точності врівноважених елементів. Значення істинних похибок дає можливість зробити порівняльний аналіз. Набирається велика статистика шляхом побудови і дослідження великої кількості моделей.

Розроблена методика дозволить зробити попередній розрахунок точності при проектуванні майбутніх геомагнітних досліджень в будь-якій точці планети Земля.

Розділ 1. Геомагнітний момент Землі

1.1. Представлення геомагнітного моменту поля Землі

Магнітний момент – це векторна величина, яка характеризує земну кулю як джерело магнітного поля. Макроскопічні магнітні моменти створюють замкнуті електричні струми і впорядковано орієнтовані магнітні моменти атомних частинок.

Розрахуємо магнітний момент M Землі на екваторі при $\Phi_{\text{маг. Екв.}} = 0$.

При цьому спочатку розглянемо елементи земного магнетизму.

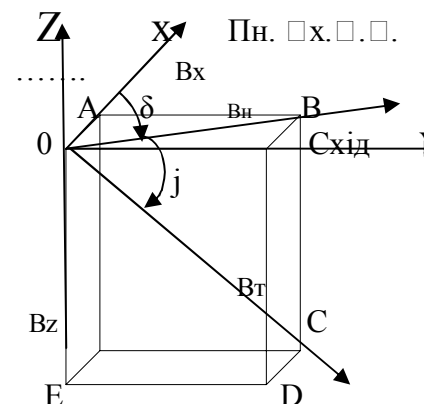


Рис.1.1. Елементи земного магнетизму

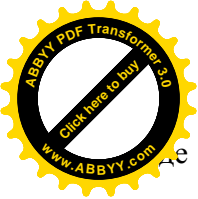
Проекції B_z і B_n індукції дипольного поля, або поля однорідного намагнічування Землі, можна знайти за допомогою формул.

Вертикальна складова геомагнітного поля Землі

$$B_z = \mu_0 \frac{M}{2\pi R^3} \sin \Phi_m \quad (1.1);$$

горизонтальна складова

$$B_n = \mu_0 \frac{M}{4\pi R^3} \cos \Phi_m \quad (1.2)$$



де μ_0 – магнітна стала;

M – магнітний момент земної кулі;

R – радіус Землі;

φ_m – геомагнітна широта, яка відраховується від геомагнітного екватора

Із приведених формул легко знайти модуль вектора індукції поля однорідного намагнічування Земної кулі:

$$\beta_T = \sqrt{B_Z^2 + B_H^2} \quad (1.3).$$

Підставляючи (1.1), (1.2) в (1.3), будемо мати:

$$\beta_T = \sqrt{\mu_0^2 \frac{M^2}{2\pi^2 R^6} \left(\sin^2 \varphi_m + \frac{\cos^2 \varphi_m}{4} \right)};$$

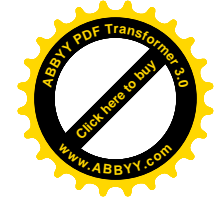
або:

$$\beta_T = \mu \frac{M}{2\pi R^3} \sqrt{\frac{4\sin^2 \varphi_m + \cos^2 \varphi_m}{4}}.$$

Приймаючи до уваги, що $\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi = 1$, а $4\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi = 3\sin^2 \varphi + \sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi$;

$$\beta_T = \mu \frac{M}{4\pi R^3} \sqrt{3\sin^2 \varphi + 1} \quad (1.4).$$

Знайдемо магнітний момент M із формули (1.4)



$$M = \frac{4\pi R^3 B_T}{\mu \sqrt{3\sin^2 \varphi_m + 1}} \quad (1.5).$$

Напруженість магнітного поля на магнітному екваторі $H_{\text{екв.}} = 0,34$ ерстеда [3, – с. 163].

Для переходу із системи СГСМ у систему СІ складемо слідууючу пропорцію

$$\text{Напруженості } 1 \frac{a}{m} \text{ відповідає } 4\pi \cdot 10^{-3} e, \\ H_{\text{екв.}} \text{ дорівнює } 0,34 e,$$

звідки

$$H_{\text{екв.}} = \frac{1 \frac{a}{m} \cdot 0,34 e}{4\pi \cdot 10^{-3} e} = 27,05634033 \frac{a}{m}.$$

В загальному випадку напруженість магнітного поля Землі можна розрахувати за формулою

$$H = \frac{B_T}{\mu_0} = \frac{M}{4\pi R^3} \sqrt{3\sin^2 \varphi_m + 1} \quad (1.6).$$

Тоді, загальна формула розрахунку магнітного моменту Землі буде

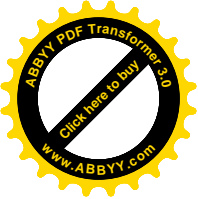
$$M = \frac{4\pi R^3 H}{\sqrt{1 + 3\sin^2 \varphi_m}}. \quad (1.7)$$

Для полюса $H_{\text{пол.}} = 0,66$ ерстед. Тоді, при переході до системи СІ

$$1 \frac{a}{m} \text{ відповідає } 4\pi \cdot 10^{-3} e,$$

$$H_{\text{пол.}} \text{ дорівнює } 0,66 e,$$

звідки



$$H_{\text{пол.}} = \frac{1 \frac{a}{m} \cdot 0,66e}{4\pi \cdot 10^{-3} e} = 52,52113122 \frac{a}{m}.$$

Магнітний момент Землі біля полюсів

$$M_{\text{пол.}} = \frac{H_{\text{пол.}} \cdot 4\pi R^3}{\sqrt{1 + 3 \sin^2 90^\circ}}$$

Взявши радіус земної кулі $R=6371000\text{м}$, а $4\pi R^3 = 3,249620751 \cdot 10^{21} \text{ м}^3$, магнітний момент земної кулі на екваторі буде

$$M_{\text{екв.}} = \frac{3,249620751 \cdot 10^{21} [\text{м}^3] \cdot 27,05634033 [\frac{a}{m}]}{1} = 8,792284498 \cdot 10^{22} \text{ ам}^2$$

Розрахуємо магнітний момент земної кулі на полюсі

$$M_{\text{пол.}} = \frac{3,249620751 \cdot 10^{21} \cdot 52,52113122}{2} = 8,533687894 \cdot 10^{22} \text{ ам}^2$$

Розрахуємо магнітний момент Землі на широті 45° , прийнявши середнє значення напруженості

$$H_{45^\circ} = \frac{H_0 + H_{90^\circ}}{2} = \frac{0,34e + 0,66e}{2} = 0,50e$$

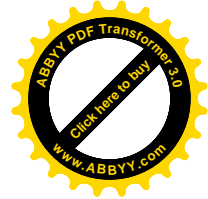
Тоді

$$1 \frac{a}{m} \text{ відповідає } 4\pi \cdot 10^{-3} e$$

$$H_{45^\circ} \text{ дорівнює } 0,5 e.$$

Звідки

$$H_{45^\circ} = \frac{1 \frac{a}{m} \cdot 0,5e}{4\pi \cdot 10^{-3} e} = 39,78873577 \frac{a}{m}$$



Таким чином, напруженість магнітного поля H_{45° буде

$$H_{45^\circ} = \frac{3,249620751 \cdot 10^{21} \text{ м}^3 \cdot 39,78873577 \frac{a}{m}}{\sqrt{1 + 3 \sin^2 45^\circ}}$$

$$H_{45^\circ} = 8,177542602 \cdot 10^{22} \text{ ам}^2$$

Знайдемо середню напруженість магнітного поля Землі для широти $22,5^\circ$

$$H_{22,5^\circ} = \frac{0,34e + 0,5e}{2} = 0,42 e,$$

для $\varphi_{\text{маг.}} = 67,5^\circ$

$$H_{67,5^\circ} = \frac{0,5e + 0,6e}{2} = 0,58e$$

для $\varphi_{\text{маг.}} = 22,5^\circ$

$$1 \frac{a}{m} \text{ відповідає } 4\pi \cdot 10^3 e$$

$$H_{22,5^\circ} \text{ дорівнює } 0,42 e$$

звідки

$$H_{22,5^\circ} = \frac{1 \frac{a}{m} \cdot 0,42e}{4\pi \cdot 10^3 e} = 33,422538 \frac{a}{m},$$

І по аналогії

$$H_{67,5^\circ} = \frac{1 \frac{a}{m} \cdot 0,58e}{4\pi \cdot 10^3 e} = 46,1549335 \text{ ам}^2.$$

Магнітні моменти будуть відповідно

$$\frac{3,249620751 \cdot 10^{21} \cdot 33,42253805}{\sqrt{1 + 3 \sin^2 22,5^\circ}} = 9,052956514 \cdot 10^{22} \text{ ам}^2,$$

$$M_{67,5^\circ} = \frac{3,249620751 \cdot 10^{21} \cdot 46,1549335}{\sqrt{1 + 3 \sin^2 67,5^\circ}} = 7,948506716 \cdot 10^{22} \text{ ам}^2$$

Результати залежності геомагнітного моменту Землі від широти точки спостереження зведено в **Табл 1**.

Таблиця 1. Залежність геомагнітного моменту Землі від широти точки спостереження

№	$\varphi_{\text{маг.}} = X$	$Y = M = f(x) \left(\frac{a}{M} \right)$
1	0,00	$8,79 \cdot 10^{22} *$
2	11,25	$8,9 \cdot 10^{22}$
3	22,5	$9,05 \cdot 10^{22}$
4	33,75	$8,5 \cdot 10^{22}$
5	45	$8,18 \cdot 10^{22}$
6	56,25	$8 \cdot 10^{22}$
7	67,5	$7,95 \cdot 10^{22}$
8	78,75	$8,12 \cdot 10^{22}$
9	90	$8,53 \cdot 10^{22}$
n=9		$\Sigma = 76,02 \cdot 10^{22}$

Згідно формули (1,7) магнітний момент залежить від напруженості магнітного поля і широти точки спостереження, тобто є функцією двох незалежних змінних, хоча в свою чергу напруженість геомагнітного поля також залежить від широти. На жаль, у нас немає формули залежності напруженості магнітного

поля від широти, що не потребувало б знань про геомагнітний момент і навпаки.

Тому безперечний інтерес представляє встановлення функціональної залежності магнітного моменту, як головного компонента для визначення складових геомагнітного поля Землі, від геомагнітної широти.

Примітка. В подальшому для спрощення викладок множник 10^{22} писати не будемо, але його слід мати на увазі, особливо при оцінці точності результатів.

1.2. Представлення істинної моделі

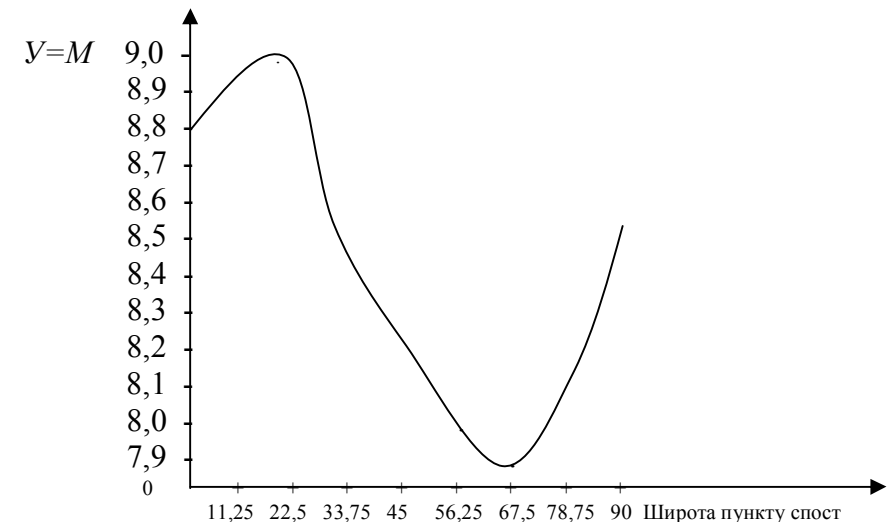


Рис. 1. Графік залежності магнітного моменту земної кулі від геомагнітної широти

Маючи вузлові точки значень геомагнітного моменту Землі в магнітних широтах $0, 22,5^\circ, 45^\circ, 67,5^\circ$ і 90° побудуємо точкову діаграму і графік, представлений на рис. 1.

Із цього графіка видно, що екстремум функції буде на широті $22,5^\circ$ і $67,5^\circ$. Як видно із графіка, кращою функцією для апроксимації буде кубічний поліном, тобто будемо шукати функціональну залежність у вигляді функції виду

$$y = ax^3 + bx^2 + cx + d \quad (1.2.1)$$

Невідомі коефіцієнти a, b, c, d визначимо по способу найменших квадратів.

Проміжні точки в $11,25^0$, $33,75^0$, $56,25^0$ і $78,75^0$ визначимо безпосередньо із графіка. Цього нам буде цілком достатньо для побудови експериментальної моделі.

Побудовану таким чином експериментальну модель залежності магнітного моменту земної кулі від широти в подальшому зрівноважили і отримали формулу [7,с.38]

$$Y=M=1.2190 \cdot 10^{-5} X^3 - 1.4404 \cdot 10^{-3} X^2 + 2.8370 \cdot 10^{-2} X + 8,8028 \quad (1.2.2)$$

яку приймемо за істинну модель і, генеруючи істинні похибки будемо створювати спотворені моделі, на яких можна дослідити точність визначення магнітного моменту в залежності від похибки визначення широти.

Таблиця 2. Залежність геомагнітного моменту Землі від широти точки спостереження (істинна модель за формулою 1.1)

№	$\varphi_{\text{маг.}} = X$	$Y = M = f(x) \left(\frac{a}{M} \right)$
1	0	8,803
2	11,25	8,957
3	22,5	8,851
4	33,75	8,598
5	45	8,274
6	56,25	8,011
7	67,5	7,904
8	78,75	8,057
9	84,375	8,264
10	90	8,575
n=9	489,375	84,294

Розділ 2. Побудова спотвореної моделі

2.1. Генерування істинних похибок для дослідження математичної моделі методом статистичних випробувань Монте Карло

В роботі [1] істинна модель спотворювалась введенням істинних похибок в незалежні змінні X . В даній монографії істинні похибки будемо вводити в експериментальні параметри Y .

Приведемо методику розрахунку випадкових чисел, які приймемо в подальшому, як істинні похибки для побудови спотвореної моделі.

1. Отримавши ряд випадкових (а точніше псевдо-

$$\text{випадкових) чисел } \xi_{cp}, \quad \xi_{cp} = \frac{\sum_{i=1}^n \xi_i}{n}, \quad (2.1.1)$$

Де n – сума випадкових чисел.

2. Розраховуються попередні значення істинних похибок Δ'_i за формулою

$$\Delta'_i = \xi_i - \xi_{cp} \quad (2.1.2)$$

3. Знаходять середню квадратичну похибку попередніх істинних похибок за формулою Гауса

$$m_{\Delta'} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n \Delta'^2_i}{n}} \quad (2.1.3)$$

4. Знаходять коефіцієнт пропорційності K , для визначення істинних похибок необхідності точності

$$K = \frac{c}{m'_{\Delta}}, \quad (2.1.4)$$

де c – необхідна константа.

Так, наприклад, при $m'_{\Delta} = 0,28$ і необхідності побудови математичної моделі з точністю $c = 0,1$, будемо мати

$$K_{0,1} = \frac{0,1}{0,28} = 0,357, \text{ а при } c = 0,05, \text{ отримаємо}$$

$$K = \frac{0,05}{0,28} = 0,178.$$

5. Істинні похибки розраховуються за формулою

$$\Delta_i = \Delta'_i \cdot K \quad (2.1.5)$$

6. Заключним контролем служить розрахунок середньої квадратичної похибки m_{Δ} генерованих істинних похибок Δ

$$m_{\Delta} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n \Delta_i^2}{n}} \quad (2.1.6)$$

$$\text{і порівняння} \quad m_{\Delta} = c \quad (2.1.7)$$

Таблиця 3. Генерування псевдо-випадкових чисел і розрахунок істинних похибок

№	ξ_i	ξ_{cp}	$\Delta'_i = \xi_i - \xi_{cp}$	$\Delta_i'^2$	$\Delta_i = \Delta'_i \cdot K$	Δ_i^2
1	0,24	0,416	-0,176	0,03098	-0,0969	0,00939122
2	0,26	0,416	-0,156	0,02434	-0,0859	0,00737812
3	0,68	0,416	0,264	0,06970	0,14536	0,02113024
4	0,44	0,416	0,024	0,00058	0,01321	0,00017463
5	0,11	0,416	-0,306	0,09364	-0,1685	0,02838831
6	0,46	0,416	0,044	0,00194	0,02423	0,00058695
7	0,25	0,416	-0,166	0,02756	-0,0914	0,00835435
8	0,64	0,416	0,224	0,05018	0,12334	0,01521222
9	0,53	0,416	0,114	0,01300	0,06277	0,00394009
10	0,55	0,416	0,134	0,01796	0,07378	0,00544385
n=10	4,16	4,16	-2E-16	0,32984	0,0E+00	0,10000000

Середня квадратична похибка попередніх істинних похибок

$$\Delta'_o = \sqrt{\frac{0,32984}{10}} = 0,1816298445$$

$$\text{Коефіцієнт пропорційності } K = \frac{0,1}{0,1816298445} = 0,5505703111$$

Середня квадратична похибка при генеруванні випадкових чисел з точністю $c = 0,1$

$$m_{\Delta_i} = \sqrt{\frac{0,1000000}{10}} = 0,1$$

2.2. Представлення спотвореної моделі

Таблиця 4. Побудова спотвореної моделі

№	Істинна модель		Δ_i	$Y_{спотв.} = Y_{icm.} + \Delta_i$
	x_{icm}	y_{icm}		
1	0	8,803	-0,0969	8,706
2	11,25	8,957	-0,0859	8,871
3	22,5	8,851	0,14536	8,9964
4	33,75	8,598	0,01321	8,6112
5	45	8,274	-0,1685	8,1055
6	56,25	8,011	0,02423	8,0352
7	67,5	7,904	-0,0914	7,8126
8	78,75	8,057	0,12334	8,1803
9	84,375	8,264	0,06277	8,3268
10	90	8,575	0,07378	8,6488
	489,375	84,294	0,0E+00	84,294

По даним спотвореної моделі виконують строге зрівноваження методом найменших квадратів і отримують ймовірнішу модель, роблять оцінку точності зрівноважених елементів і дають порівняльний аналіз.

Розділ 3. Зрівноваження моделі

3.1. Представлення системи нормальних рівнянь

У результаті проведеного експерименту ми маємо ряд результатів X_i, V_i , функціональну залежність між якими будемо шукати за допомогою поліному степені K , де коефіцієнти a_i являються невідомими.

Тоді, система нормальних рівнянь буде

$$\begin{aligned} na_0 + a_3[x] + a_2[x^2] + \dots + a_m[x^m] - [y] &= 0, \\ a_0[x] + a_3[x^2] + a_2[x^3] + \dots + a_m[x^{m+1}] - [xy] &= 0, \\ a_0[x^2] + a_1[x^3] + a_2[x^4] + \dots + a_m[x^{m+1}] - [x^2y] &= 0, \end{aligned} \quad (3.1.1)$$

$$a_0[x^m] + a_1[x^{m+1}] + a_2[x^{m+2}] + \dots + a_m[x^{2m}] - [x^m y] = 0,$$

де знаком $[\]$ позначена сума відповідного елемента.

Для поліному третього порядку виду

$$y = ax^3 + bx^2 + cx + d \quad (3.1.2)$$

Система нормальних рівнянь буде

$$\begin{aligned} dn + c[x] + b[x^2] + a[x^3] - [y] &= 0, \\ d[x] + c[x^2] + b[x^3] + a[x^4] - [xy] &= 0, \\ d[x^2] + c[x^3] + b[x^4] + a[x^5] - [x^2y] &= 0, \\ d[x^3] + c[x^4] + b[x^5] + a[x^6] - [x^3y] &= 0. \end{aligned} \quad (3.1.3)$$

або

$$\begin{aligned} a[x^6] + b[x^5] + c[x^4] + d[x^3] - [x^3y] &= 0, \\ a[x^5] + b[x^4] + c[x^3] + d[x^2] - [x^2y] &= 0, \\ a[x^4] + b[x^3] + c[x^2] + d[x] - [xy] &= 0, \\ a[x^3] + b[x^2] + c[x] + dn - [y] &= 0. \end{aligned} \quad (3.1.4)$$

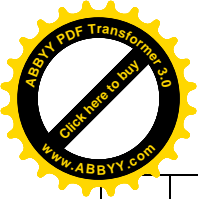
В подальшому будемо рishати систему лінійних нормальних рівнянь (3.1.3) або (3.1.4) одним із відомих в математиці способів.

3.2. Встановлення коефіцієнтів нормальних рівнянь

Приведемо розрахункову таблицю, на основі якої стримують коефіцієнти нормальних рівнянь.

Таблиця 5. Розрахунок коефіцієнтів нормальних рівнянь

№	$x_{истн.}$	$y_{снотв}$	x^0	x^2	x^3	x^4	x^5
1	0	8,706	1	0	0	0	0
2	11,25	8,871	1	126,563	1423,828	16018,066	180203,247
3	22,5	8,9964	1	506,250	11390,625	256289,063	5766503,906
4	33,75	8,6112	1	1139,063	38443,359	1297463,379	43789389,038
5	45	8,1055	1	2025,000	91125,000	4100625,000	184528125,000
6	56,25	8,0352	1	3164,063	177978,516	10011291,504	563135147,095
7	67,5	7,8126	1	4556,250	307546,875	20759414,063	1401260449,219
8	78,75	8,1803	1	6201,563	488373,047	38459377,441	3028675973,511
9	84,375	8,3268	1	7119,141	600677,490	50682163,239	4276307523,251
10	90	8,6488	1	8100,000	729000,000	65610000,000	5904900000,000
Σ	489,375	84,294	10	32937,891	2445958,740	191192641,754	15408543314,266

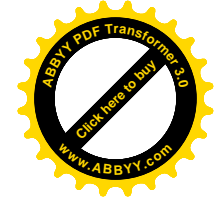


Продовження таблиці 5

№	x^6	xy	x^2y	x^3y
1	0	0	0	0
2	2027286,530	99,79992	1122,749	12630,92738
3	129746337,891	202,418155	4554,408	102474,1912
4	1477891880,035	290,628498	9808,712	331044,024
5	8303765625,000	364,748026	16413,66	738614,7531
6	31676352024,078	451,981523	25423,96	1430097,788
7	94585080322,266	527,350355	35596,15	2402740,053
8	238508232913,971	644,201605	50730,88	3995056,518
9	360813447274,268	702,571232	59279,45	5001703,398
10	531441000000,000	778,390421	70055,14	6304962,414
Σ	1266937543664,040	4062,090	272985,1	20319324,1

Таким чином, на основі проведених розрахунків нами отримана наступна матриця коефіцієнтів нормальних рівнянь

10,0	489,4	32937,9	2445958,7
489,4	32937,9	2445958,7	191192641,8
32937,9	2445958,7	191192641,8	15408543314,3
2445958,7	191192642	15408543314,3	1266937543664,0



3.3. Рішення системи лінійних рівнянь способом Крамера

Нехай, маємо систему лінійних рівнянь

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2, \\ &\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n &= b_n. \end{aligned} \quad (3.3.1)$$

Для того, щоб із цієї системи визначити невідомі x , складемо із коефіцієнтів при невідомих визначник Δ , який називається визначником системи рівнянь (3.3.1).

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \quad (3.3.2)$$

Помножимо ліву і праву частини рівності (3.3.2) на x_i . В лівій частині будемо мати Δx_i , в правій же частині введемо у всі члени i -го стовпчика визначника a_k і множник x_i

$$\Delta \cdot x_i = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1i}x_i & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2i}x_i & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{ni}x_i & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \quad (3.3.3)$$

Потім до i -го стовпчика визначника (3.3.3) додамо всі інші стовпчики, помножені відповідно на x_1, x_2, \dots, x_n . Величина визначника від цього не зміниться. Тоді i -стовпчик представить собою ліву частину системи рівнянь (3.3.1).

Замінімо його вільними членами цієї системи і позначимо через Δ_i

$$\Delta \cdot x_i = \Delta_i = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & b_1 \dots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & b_2 \dots a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & b_n \dots a_{nn} \end{vmatrix} \quad (3.3.4)$$

$$\text{Звідки, } x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & b_1 \dots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & b_2 \dots a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & b_n \dots a_{nn} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \dots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \dots a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} \dots a_{nn} \end{vmatrix}}. \quad (3.3.5)$$

Формула (3.3.5) дає можливість визначити кожне невідоме системи лінійних рівнянь (3.3.1).

Якщо вільні члени системи лінійних рівнянь рівні нулю, то вона буде системою лінійних однокорінних рівнянь.

Система лінійних одно корінних рівнянь може мати рішення відмінне від нульового, якщо визначник системи Δ рівний нулю.

Для системи чотирьох лінійних рівнянь

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 &= b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 &= b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + a_{34}x_4 &= b_3, \\ a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + a_{43}x_3 + a_{44}x_4 &= b_4, \end{aligned} \quad (3.3.6)$$

якщо визначник системи Δ не дорівнює нулю

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} \neq 0, \quad (3.3.7)$$

то система визначника і по Крамеру її невідомі виражаються формулами

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ b_4 & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}}{\Delta}, \quad (3.3.8)$$

$$x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & b_4 & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}}{\Delta}, \quad (3.3.9)$$

$$x_3 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & b_2 & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & b_3 & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & b_4 & a_{44} \end{vmatrix}}{\Delta}, \quad (3.3.10)$$

$$x_4 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & b_3 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & b_4 \end{vmatrix}}{\Delta} \quad (3.3.11)$$

Як бачимо, що

$$\Delta_{x_1} = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ b_4 & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}, \quad (3.3.12)$$

$$\Delta_{x_2} = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & b_4 & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}, \quad (3.3.13)$$

$$\Delta_{x_3} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & b_2 & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & b_3 & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & b_4 & a_{44} \end{vmatrix}, \quad (3.3.14)$$

$$\Delta_{x_4} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & b_3 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & b_4 \end{vmatrix}. \quad (3.3.15)$$

Приведемо формулу знаходження визначника четвертого порядку

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = (a_{23}a_{43} - a_{33}a_{42})(a_{11}a_{24} - a_{14}a_{21}) + \\ + (a_{32}a_{44} - a_{34}a_{42})(a_{13}a_{21} - a_{11}a_{23}) + (a_{31}a_{43} - a_{33}a_{41})(a_{14}a_{22} - a_{12}a_{24}) + \\ + (a_{31}a_{42} - a_{32}a_{41})(a_{13}a_{24} - a_{14}a_{23}) + (a_{33}a_{44} - a_{34}a_{43})(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) + \\ + (a_{31}a_{44} - a_{34}a_{41})(a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22}). \quad (3.3.16)$$

І в нашому випадку визначник системи $D = 1,38204E+21$

1266937543664,04	15408543314,27	191192642	2445959
15408543314,266	191192642	2445959	32937,891
191192641,754	2445959	32938	489
2445958,740	32938	489	10

20319324,0665	15408543314	191192642	2445959
272985,10224	191192642	2445959	32938
4062,0897363	2445959	32938	489
84,294000000	32938	489	10
D1=		2,0107E+16	

тоді невідомий коефіцієнт a при x^3 буде

$$a = x_1 = \frac{D1}{D} = \frac{2,0107E+16}{1.38204E+21} = 0,000014549;$$

1266937543664	20319324,067	191192642	2445959
15408543314	272985,102	2445959	32938
191192642	4062,090	32938	489,375
2445959	84,2940	489,375	10
D2=		-2,4099E+18	

тоді невідомий коефіцієнт b при x^2 буде

$$b = x_2 = \frac{D2}{D} = \frac{-2,4099E+18}{1.38204E+21} = -0,001744;$$

1266937543664	15408543314	20319324	2445958,7
15408543314	191192642	272985	32937,891
191192642	2445959	4062	489,375
2445959	32938	84,294	10
D3=	5,3992E+19		

і невідомий коефіцієнт c при x буде

$$c = x_3 = \frac{D3}{D} = \frac{5,3992E+19}{1.38204E+21} = 0,039067;$$

1266937543664	15408543314	191192642	20319324
15408543314	191192642	2445959	272985
191192642	2445959	32938	4062
2445959	32938	489,375	84,294
D4=	1,2027E+22		

коефіцієнт d буде

$$d = \frac{D4}{D} = \frac{1,2027E+22}{1.38204E+21} = 8,702439.$$

Таким чином, на основі проведених досліджень, математична модель залежності магнітного моменту планети Земля y_i від широти пункту спостереження x_i виражається формулою

$$y' = 0,000014549x^3 - 0,001744x^2 + 0,039067x + 8,702439. \quad (3.3.17)$$

Розділ 4. Оцінка точності

4.1. Контроль зрівноваження

Підставляючи отримані значення коефіцієнтів a, b, c, d у формулу (3.4), отримаємо наступні результати.

Таблиця 6. Коефіцієнти нормальних рівнянь і контроль зрівноваження

	x^3	x^2	x	x^0	y	Контроль
$[x^3]$	1266937543664,04	15408543314,27	191192642	2445959	20319324,07	20319324,067
$[x^2]$	15408543314,266	191192642	2445959	32937,891	272985,102	272985,102
$[x]$	191192641,754	2445959	32938	489	4062,090	4062,090
$[x^0]$	2445958,740	32938	489	10	84,294	84,294
	0,000014549	-0,001744	0,039067	8,702439		
	Ошибка! Объект не может быть создан из кодов полей редактирования.	b	c	d		

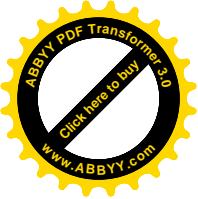
$$[Y] - d[YX^3] - b[YX^2] - c[YX] - d[Y]$$

$$= 0,067073272. \quad \text{З другої сторони } [VV] = 0,067073$$

4.2. Оцінка точності параметрів, отриманих із рішення системи нормальних рівнянь

Середні квадратичні похибки визначаємих x_1, x_2, x_3, x_4 розраховуються за формулами:

$$m_{x_1} = \mu \sqrt{\frac{A_{11}}{D}}, \quad (4.2.1)$$



$$m_{x_2} = \mu \sqrt{\frac{A_{22}}{D}}, \quad (4.2.2)$$

$$m_{x_3} = \mu \sqrt{\frac{A_{33}}{D}}, \quad (4.2.3)$$

$$m_{x_4} = \mu \sqrt{\frac{A_{44}}{D}}, \quad (4.2.4)$$

де $m_{x_1}, m_{x_2}, m_{x_3}, m_{x_4}$ – середні квадратичні похибки визначаємих невідомих x_1, x_2, x_3, x_4 , μ – середня квадратична похибка одиниці ваги, яка розраховується за формулою

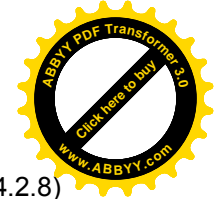
$$\mu = \sqrt{\frac{[VV]}{n - K}} \quad (4.2.5)$$

У формулі (4.2.5) n - число початкових рівнянь, K - число невідомих. В нашому випадку $n = 10; K = 4$. V - різниця між вихідним значенням y_i і вирахуванням значенням y' за отриманою нами формулою (3.3.17);

$$V_i = y_i - y'_i \quad (4.2.6)$$

$A_{11}, A_{22}, A_{33}, A_{44}$ – алгебраїчні доповнення першого, другого, третього і четвертого діагональних елементів

$$A_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}, \quad (4.2.7)$$



$$A_{22} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} & a_{14} \\ a_{31} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}, \quad (4.2.8)$$

$$A_{33} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{24} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{vmatrix}, \quad (4.2.9)$$

$$A_{44} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad (4.2.10)$$

$$\text{де } \Delta = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} + a_{14}A_{14}. \quad (4.2.11)$$

Приведемо формулу розкриття визначника третього порядку

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) + a_{12}(a_{23}a_{31} - a_{21}a_{33}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}). \quad (4.2.12)$$

І в нашому випадку отримаємо

		19119264	
		2	2445959
A11=	4,7761E+11	2445959	32938
		32937,891	489,375
			10

величина оберненої ваги

$$\frac{1}{P_{x_1}} = \frac{A_{11}}{D} = \frac{4.7761E+11}{1.38204E+21} = 3.45593E-10, a$$

$$\sqrt{\frac{1}{P_{x_{11}}}} = 0,00001859.$$

			1266937543664	191192642	2445959
A22=	8,99382E+15		191192642	32938	489,375
			2445959	489	10

$$\frac{1}{P_{x_2}} = \frac{A_{22}}{D} = \frac{8,99382E+15}{1.38204E+21} = 0,000006508; \sqrt{\frac{1}{P_{x_{22}}}} = 0,00255.$$

A33=	1,24719E+19		1266937543664	15408543314	2445959
			15408543314	191192642	32938
			2445959	32938	10

$$\frac{1}{P_{x_3}} = \frac{A_{33}}{D} = \frac{1,24719E+19}{1.38204E+21} = 0,00902; \sqrt{\frac{1}{P_{x_{33}}}} = 0,0950.$$

			1266937543664	15408543314	191192642
A44=	1.1858101E+21		15408543314	191192642	2445959
			191192642	2445959	32938

$$\frac{1}{P_{x_4}} = \frac{A_{44}}{D} = \frac{1,1858101E+21}{1.38204E+21} = 0,8580; \sqrt{\frac{1}{P_{x_{44}}}} = 0,9263.$$

Підставляючи у виведену нами, формулу (3.3.17) значення X спотвореної моделі отримаємо розрахункові значення y' , які будуть дещо відрізнятися від вихідних значень Y .

Таблиця 6. порівняльний аналіз результатів строгого зрівноваження

№	$x_{істн.}$	$y_{спотв.}$	$y'_{зрівноваж.}$	$V = y_i - y'_i$	V^2
1	0	8,706	8,702439	3,653E-03	1,3342E-05
2	11,25	8,871	8,9419657	-7,086E-02	0,005021387
3	22,5	8,9964	8,864403	1,320E-01	0,017413286
4	33,75	8,6112	8,594041	1,717E-02	0,000294938
5	45	8,1055	8,2551697	-1,497E-01	0,022397524
6	56,25	8,0352	7,9720792	6,315E-02	0,003987648
7	67,5	7,8126	7,8690597	-5,646E-02	0,003187939
8	78,75	8,1803	8,0704011	1,099E-01	0,012086088
9	84,375	8,3268	8,3240478	2,722E-03	7,41104E-06
10	90	8,6488	8,7003936	-5,161E-02	0,002663708
$n=10$	489,375	84,294	84,29	0,0000000	0,067073

Тоді, середня квадратична похибка одиниці ваги буде

$$\mu = \sqrt{\frac{[VV]}{n - K}} = 0,105730216.$$

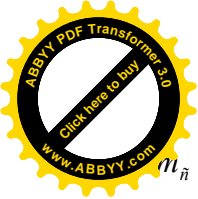
Середня квадратична похибка визначення коефіцієнта a

$$m_a = \mu \sqrt{\frac{1}{P_a}} = 0,105730216 * 0,00001859 = 1,96551E-06$$

Середня квадратична похибка визначення коефіцієнта b

$$m_b = \mu \sqrt{\frac{1}{P_b}} = 0,105730216 * 0,00255 = 0,000269719$$

Середня квадратична похибка визначення коефіцієнта c



$$m_{\tilde{n}} = \mu \sqrt{\frac{1}{P_{\tilde{n}}}} = 0,105730216 * 0,0950 = 0,010043996$$

Середня квадратична похибка визначення коефіцієнта d

$$m_d = \mu \sqrt{\frac{1}{P_d}} = 0,105730216 * 0,9263 = 0,097937049.$$

Середні квадратичні похибки зрівноваженої функції $m\phi=$

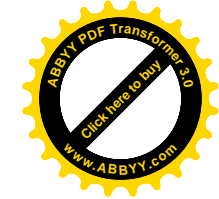
0,09793705
0,06056929
0,06436749
0,05913655
0,053427
0,05903271
0,06282029
0,05354511
0,0574161
0,08582251

Перевірка моделі на адекватність за критерієм Фішера

Перевірка на адекватність за критерієм Фішера		
39,37499	>	4,533677
Модель адекватна експериментальним даним		

Встановлення значимості коефіцієнтів регресії

Коефіцієнти регресії значимі			
ta=	7,402042	t(0,05;6)=	2,446912
tb=	6,464956		
tc=	3,889567	t(0,08;6)=	2,104306



td=	88,85748		
-----	----------	--	--

Висновки

На основі проведених досліджень в даній роботі:

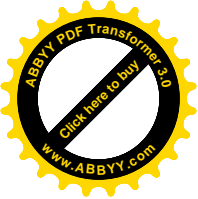
1. Генеровані випадкові числа, які приведено до нормованої досліджуваної точності.
2. На основі істинної моделі і генерованих істинних похибок побудована спотворена модель залежності магнітного моменту Землі від широти.
3. Математична модель апроксимована по способу найменших квадратів кубічним поліномом.
4. Отримана формула

$$y' = 0,000014549x^3 - 0,001744x^2 + 0,039067x + 8,702439.$$
залежності магнітного моменту Землі Y від широти X .

Встановлено, що середня квадратична похибка одиниці ваги за результатами зрівноваження складає
 $\mu = 0,105730216 * 10^{22} \text{ ам}^2.$

5. Середня квадратична похибка визначення коефіцієнта a при x^3 $m_a = 1,96551E - 06;$

- середня квадратична похибка визначення коефіцієнта b при x^2 $m_b = 0,000269719;$
- середня квадратична похибка визначення коефіцієнта c при x $m_c = 0,010043996;$



- середня квадратична похибка визначення коефіцієнта d при $m_d = 0,097937049$.

середні квадратичні похибки зрівноваженої функції $m_f =$

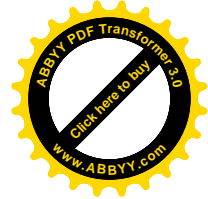
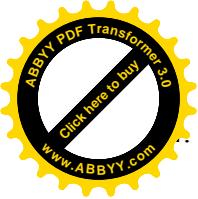
0,09793705
0,06056929
0,06436749
0,05913655
0,053427
0,05903271
0,06282029
0,05354511
0,0574161
0,08582251

6. Розроблена методика підготовки істинних похибок наперед заданої точності.
7. Дана робота відкриває дорогу для проведення досліджень методом статистичних випробувань Монте Карло.
8. Вона дає можливість охопити велику аудиторію, тому що генеруються похибки індивідуально і вони не повторюються в других моделях.
9. Робота виконується вперше. Нам не відомі літературні джерела, де б виконувались аналогічні дослідження в курсі Фізики з основами геофізики.

Літературні джерела



1. Букеев Б.О. Дослідження точності апроксимації залежності магнітного моменту Землі від широти методом статистичних випробувань Монте Карло. Модель ПГБ 61-.МЕГУ, Рівне, 2006, -29с.
2. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике. – М.: Наука, 1973,-831с.
3. Кошкин Н. И., Ширкевич М. Г. Справочник по элементарной физике. – М.: Наука, 1972,-255с.
4. Кучерук І. М., Горбачук І. Т., Луцик П. П. Загальний курс фізики. Т. 1. – К.: Техніка, 1999,-536с.
5. Кучерук І. М., Горбачук І. Т., Луцик П. П. Загальний курс фізики. Т. 2. – К.: Техніка, 1999,-452с.
6. Кучерук І. М., Горбачук І. Т. Загальний курс фізики. Т.3. – К.: Техніка, 1999,-520с.
7. Літнарівич Р. М. Дослідження точності апроксимації залежності магнітного моменту Землі від широти методом статистичних випробувань Монте Карло. Частина 1. МЕГУ, Рівне, 2006,-44с.
8. Літнарівич Р.М. Встановлення зв'язку між географічною і геомагнітною системами координат. Частина 2.МЕГУ,Рівне,2006,-47с.
9. Літнарівич Р.М. Фізика з основами геофізики. Курс лекцій.МЕГУ,Рівне,2007,-78с.
10. Літнарівич Р.М. Фізика з основами геофізики. Лабораторний практикум. Частина 1.МЕГУ,Рівне,2007,-44с.
11. Літнарівич Р.М. Фізика з основами геофізики. Лабораторний практикум. Частина 2.МЕГУ,Рівне,2008,-48с.
12. Мудров В. И., Кушко В. Л. Методы обработки измерений. – М.: Сов. радио, 1976,-192с.
13. Пастушенко С. М. Формули і закони загальної фізики: навчальний посібник для студентів вищих навчальних закладів. 2е вид.: Діал., 2005,-2668с.



- Рого К. Г. Метрологическая обработка результатов технических измерений. Справочное пособие. – К.: Техніка, 1987, -126с.
15. Розв'язування задач з курсу загальної фізики. Практикум/Остроухов А. А., Стрижевський В. Л., Цвілих М. Г. та інші. –К.: Радянська школа, 1966,-503с
16. Савельев И. В. Курс физики. Т.1. –М.:Наука, 1989,-352с
17. Савельев И. В. Курс физики. Т.2. –М.:Наука, 1989,-464с
18. Савельев И. В. Курс общей физики. –М.:Наука, 1982, - 304с
19. Ситников О. П. Основы электродинамики. Лабораторный практикум. Чернігів: ЧДІЕіУ, 2003,-48с
20. Суботін С. І. Кора і мантія Землі. –К.: Знання, 1996, -39с.
21. Топографо-геодезические термины: справочник/ Кузьмин Б. С., Герасимов Ф. Я., Молоканов В. М. и др. – М.: Недра, 1989,-261с.
22. Федоров Є. П. Обертання Землі. – К.:Знання, 1966,-52с
23. Фізика з використанням обчислювальної техніки. Практичний курс/ В. М. Казанський, В. І. Кланченко, Д. Кошелева та ін. – К.: Либідь, 1993,-224с.

Додатки

Додаток 1.

Генерування псевдовипадкових чисел, підпорядкування їх нормальному закону розподілу і розрахунок істинних похибок

0,24	0,416	-0,176	0,03098	-0,0969	0,00939122
0,26	0,416	-0,156	0,02434	-0,0859	0,00737812
0,68	0,416	0,264	0,06970	0,14536	0,02113024
0,44	0,416	0,024	0,00058	0,01321	0,00017463
0,11	0,416	-0,306	0,09364	-0,1685	0,02838831
0,46	0,416	0,044	0,00194	0,02423	0,00058695
0,25	0,416	-0,166	0,02756	-0,0914	0,00835435
0,64	0,416	0,224	0,05018	0,12334	0,01521222
0,53	0,416	0,114	0,01300	0,06277	0,00394009
0,55	0,416	0,134	0,01796	0,07378	0,00544385
4,16	4,16	-2E-16	0,32984	0,0E+00	0,10000000
A	B	C	D	E	F

Додаток 2.

Побудова спотвореної моделі

0	8,803	-0,0969	8,706
11,25	8,957	-0,0859	8,871
22,5	8,851	0,14536	8,9964
33,75	8,598	0,01321	8,6112
45	8,274	-0,1685	8,1055
56,25	8,011	0,02423	8,0352
67,5	7,904	-0,0914	7,8126
78,75	8,057	0,12334	8,1803
84,375	8,264	0,06277	8,3268
90	8,575	0,07378	8,6488

489,375	84,294	0,0E+00	84,294
I	G	E	H
Хексп.=Хістн.	Уістн.	Істинні похиб.	Усптв.

Додаток 3.

Розрахункова таблиця

0	1	0	0	0	0	0
11,25	1	126,563	1423,828	16018,066	180203,247	2027286,530
22,5	1	506,250	11390,625	256289,063	5766503,906	129746337,891
33,75	1	1139,063	38443,359	1297463,379	43789389,038	1477891880,035
45	1	2025,000	91125,000	4100625,000	184528125,000	8303765625,000
56,25	1	3164,063	177978,516	10011291,504	563135147,095	31676352024,078
67,5	1	4556,250	307546,875	20759414,063	1401260449,219	94585080322,266
78,75	1	6201,563	488373,047	38459377,441	3028675973,511	238508232913,971
84,375	1	7119,141	600677,490	50682163,239	4276307523,251	360813447274,268
90	1	8100,000	729000,000	65610000,000	5904900000,000	531441000000,000
489,375	10	32937,891	2445958,740	191192641,754	15408543314,266	1266937543664,040
I	J	K	L	M	N	O
Хексп.=Хістн.	X0	X^2	X^3	X^4	X^5	X^6

Продовження розрахункової таблиці

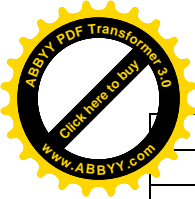
0	0	0	8,702439	3,653E-03	1,3342E-05
99,79992	1122,749	12630,92738	8,9419657	-7,086E-02	0,005021387
202,418155	4554,408	102474,1912	8,864403	1,320E-01	0,017413286
290,628498	9808,712	331044,024	8,594041	1,717E-02	0,000294938
364,748026	16413,66	738614,7531	8,2551697	-1,497E-01	0,022397524
451,981523	25423,96	1430097,788	7,9720792	6,315E-02	0,003987648
527,350355	35596,15	2402740,053	7,8690597	-5,646E-02	0,003187939
644,201605	50730,88	3995056,518	8,0704011	1,099E-01	0,012086088

702,571232	59279,45	5001703,398	8,3240478	2,722E-03	7,41104
778,390421	70055,14	6304962,414	8,7003936	-5,161E-02	0,0026637
4062,090	272985,1	20319324,1	84,29	0,0000000	0,067073
P	Q	R	S	T	U
YX	YX^2	YX^3	Y'зрівн.	V=Yсптв.-Yз	VV

Додаток 4.

Розрахунок визначників

1266937543664,04	15408543314,27	191192642	2445959
15408543314,266	191192642	2445959	32937,891
191192641,754	2445959	32938	489
2445958,740	32938	489	10
D=	1,38204E+21		
20319324,0665	15408543314	191192642	2445959
272985,10224	191192642	2445959	32938
4062,0897363	2445959	32938	489
84,294000000	32938	489	10
D1=	2,0107E+16		
1266937543664	20319324,067	191192642	2445959
15408543314	272985,102	2445959	32938
191192642	4062,090	32938	489,375
2445959	84,2940	489,375	10
D2=	-2,4099E+18		
1266937543664	15408543314	20319324	2445958,7
15408543314	191192642	272985	32937,891
191192642	2445959	4062	489,375
2445959	32938	84,294	10
D3=	5,3992E+19		
1266937543664	15408543314	191192642	20319324



	15408543314	191192642	2445959	272985
	191192642	2445959	32938	4062
	2445959	32938	489,375	84,294
D4=		1,2027E+22		

Додаток 5.

Вільні члени нормальних рівнянь

20319324,07
272985,102
4062,090
84,294

Додаток 6.

Розрахунок коефіцієнтів апроксимуючого поліному

a=D1/D=	0,000014549
b=D2/D=	-0,001744
c=D3/D=	0,039067
d=D4/D=	8,702439
Y=aX^3+bX^2+cX+d	

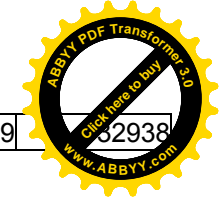
Нами виведена формула за результатами теоретичних досліджень:

$$\delta' = 0,000014549\delta^3 - 0,001744\delta^2 + 0,039067\delta + 8,702439.$$

Додаток 7.

Знаходження алгебраїчних доповнень

			1266937543664	15408543314	191192642
A44=	1,1858101,E+21		15408543314	191192642	2445959



			191192642	2445959	32938
			1266937543664	191192642	2445959
A22=	8,99382E+15		191192642	32938	489,375
			2445959	489	10
A33=	1,24719,E+19		1266937543664	15408543314	2445959
			15408543314	191192642	32938
			2445959	32938	10
			191192642	2445959	32938
A11=	4,7761E+11		2445959	32938	489,375
			32937,891	489,375	10

Додаток 8.

Контроль зрівноваження

[yy]-	a[yx^3]-	b[yx^2]	- c[yx] -	d[y]	=	0,067073272
					[VV] =	0,067073272
					Різниця=	0,000000

Додаток 9.

Оцінка точності зрівноважених елементів

Середня	квадратична похибка одиниці ваги
μ=	0,105730216
Середня	квадратична похибка коефіцієнта а
ma=	1,96551E-06
Се редня	квадратична похибка коефіцієнта в
mb=	0,000269719
Середня	квадратична похибка коефіцієнта с
mc=	0,010043996

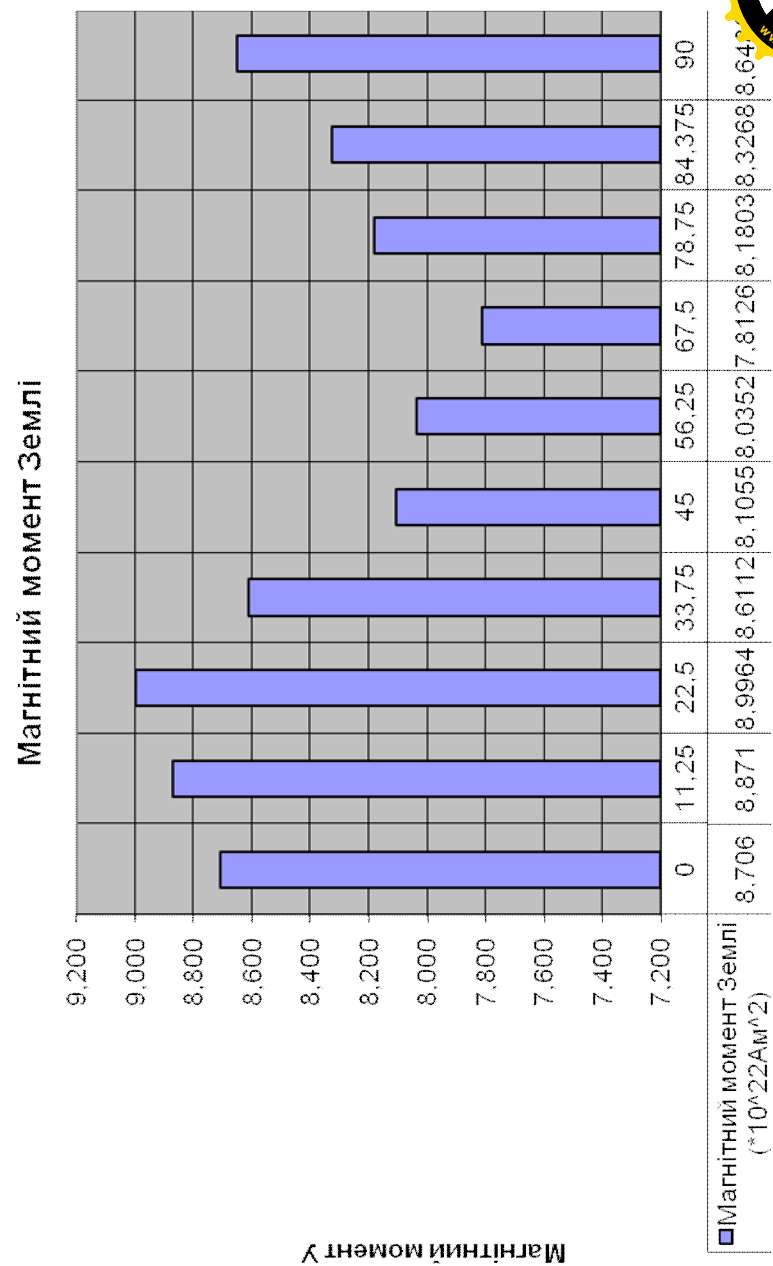
Середня квадратична похибка коефіцієнта d
md= 0,097937049

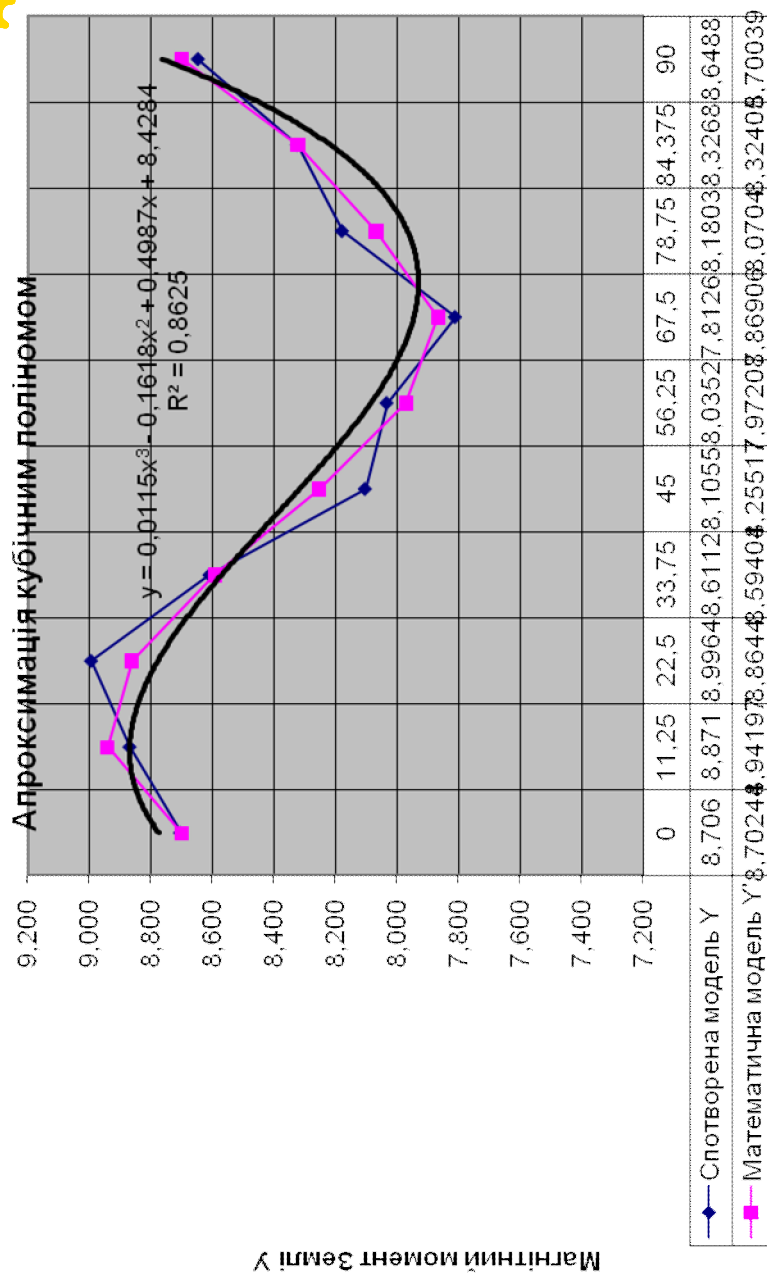
Середні квадратичні похибки зрівноваженої функції

mφ=

0,09793705
0,06056929
0,06436749
0,05913655
0,053427
0,05903271
0,06282029
0,05354511
0,0574161
0,08582251

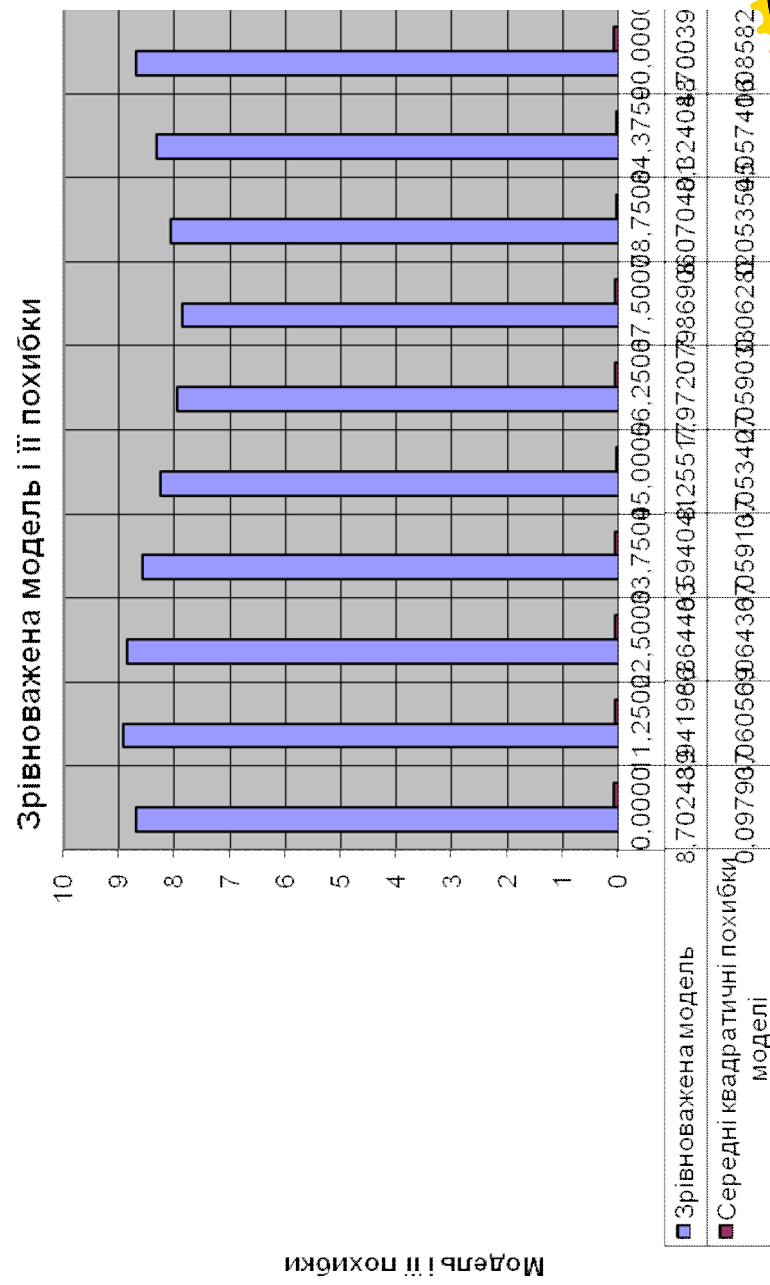
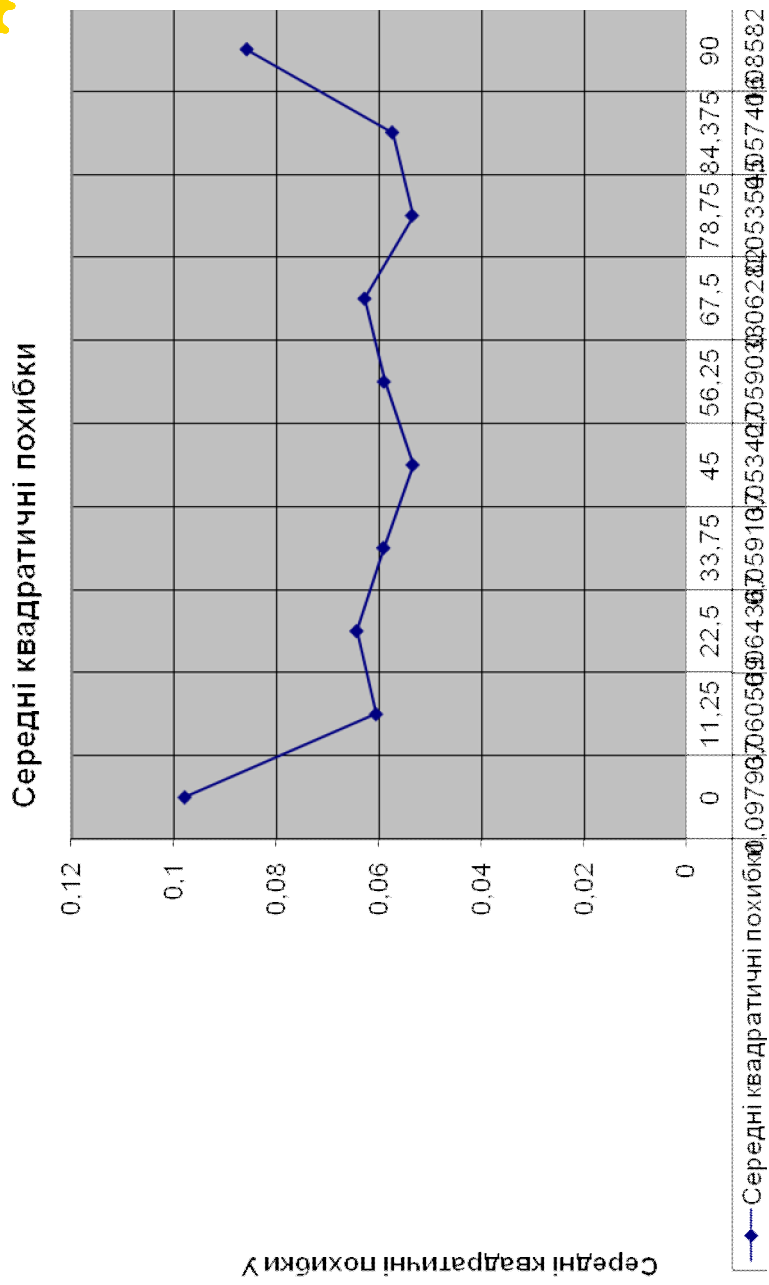
Додаток 10. Діаграми досліджень

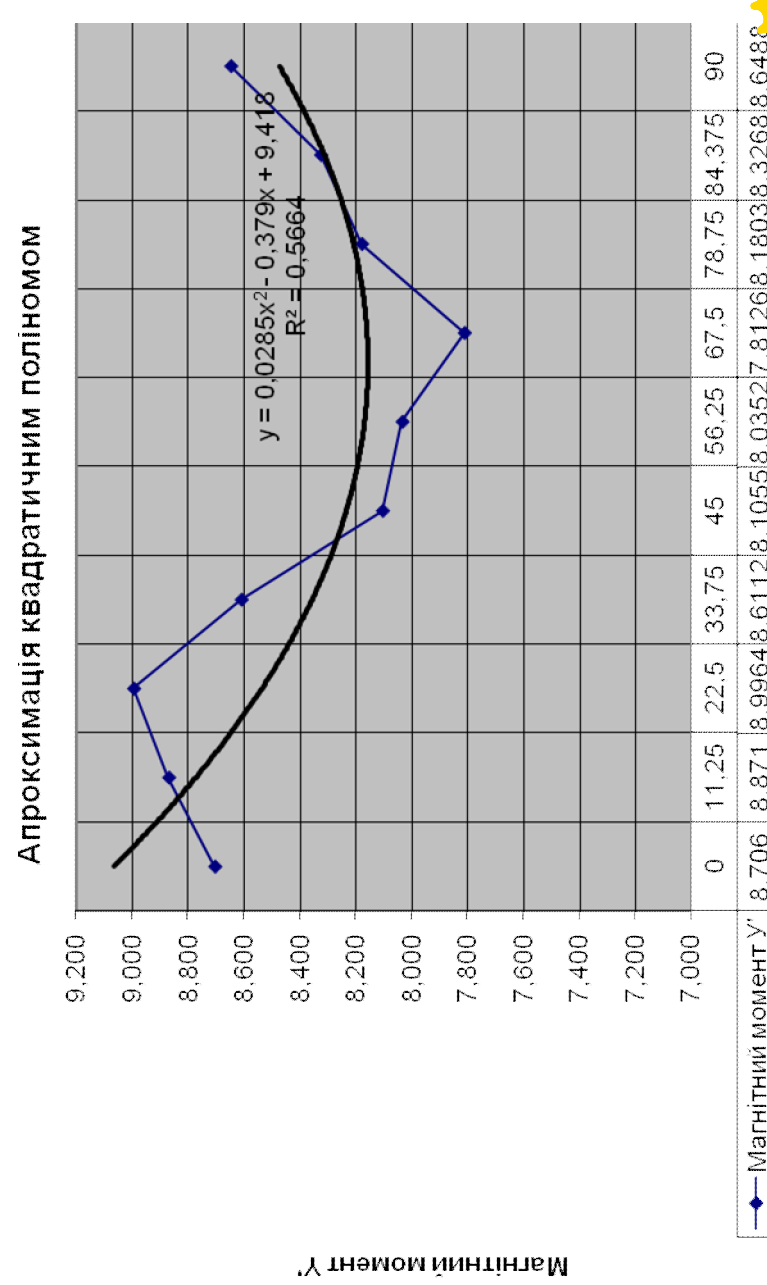
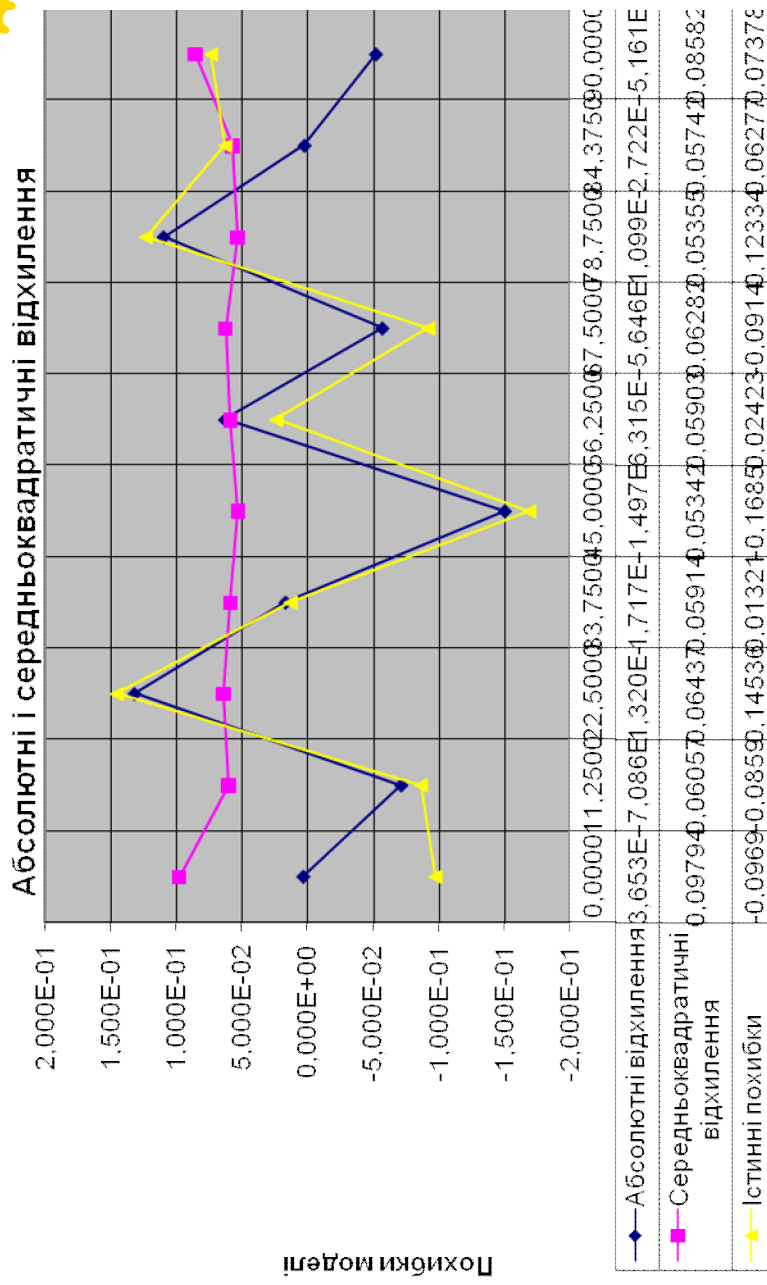




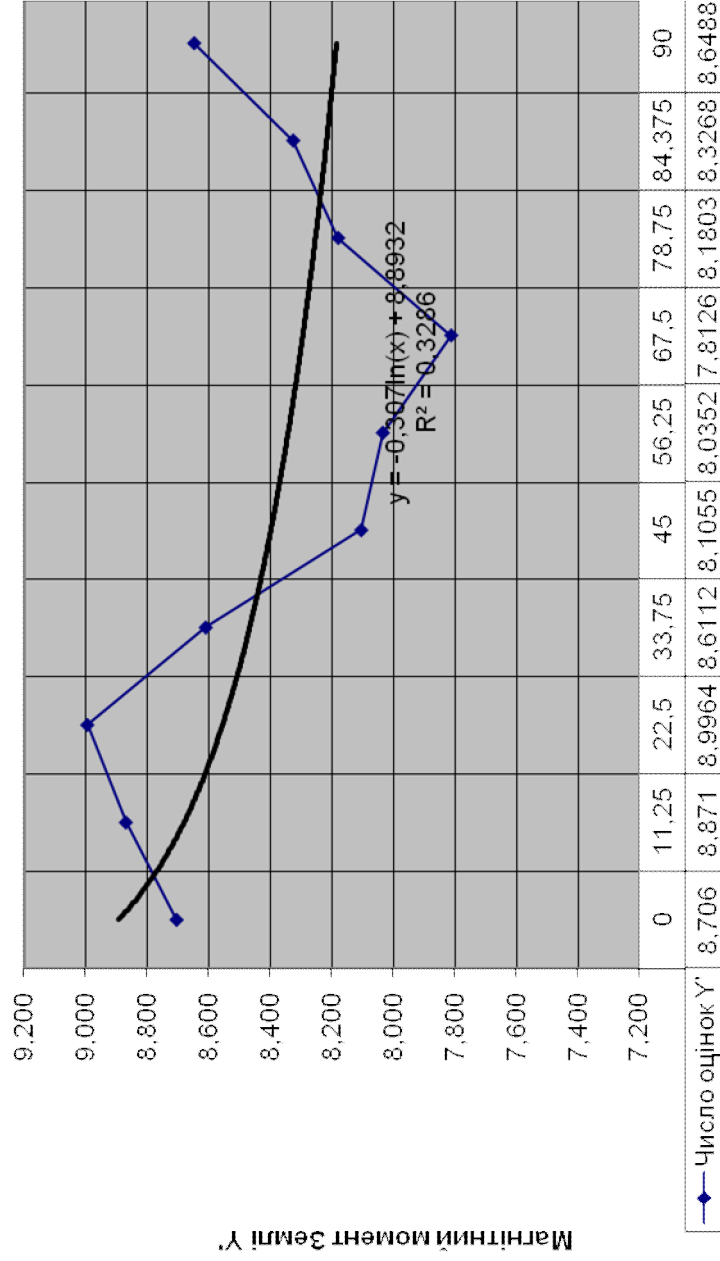
Обернені ваги



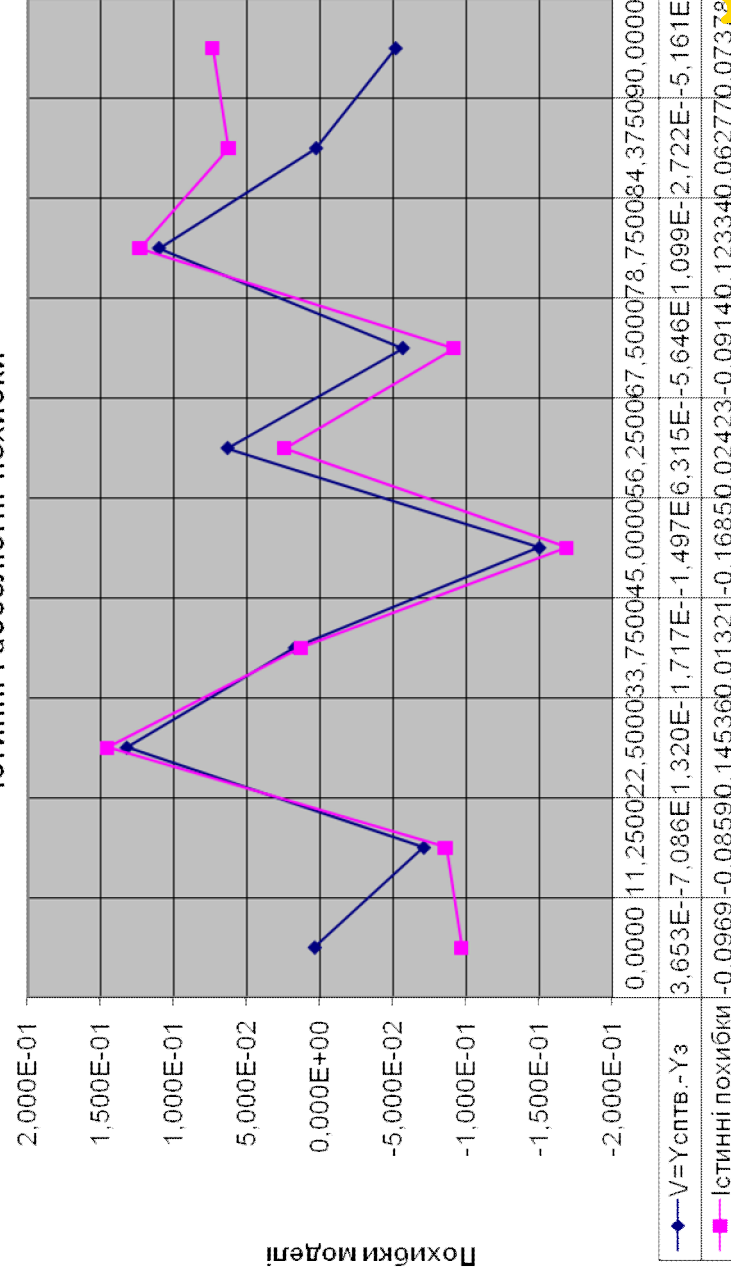


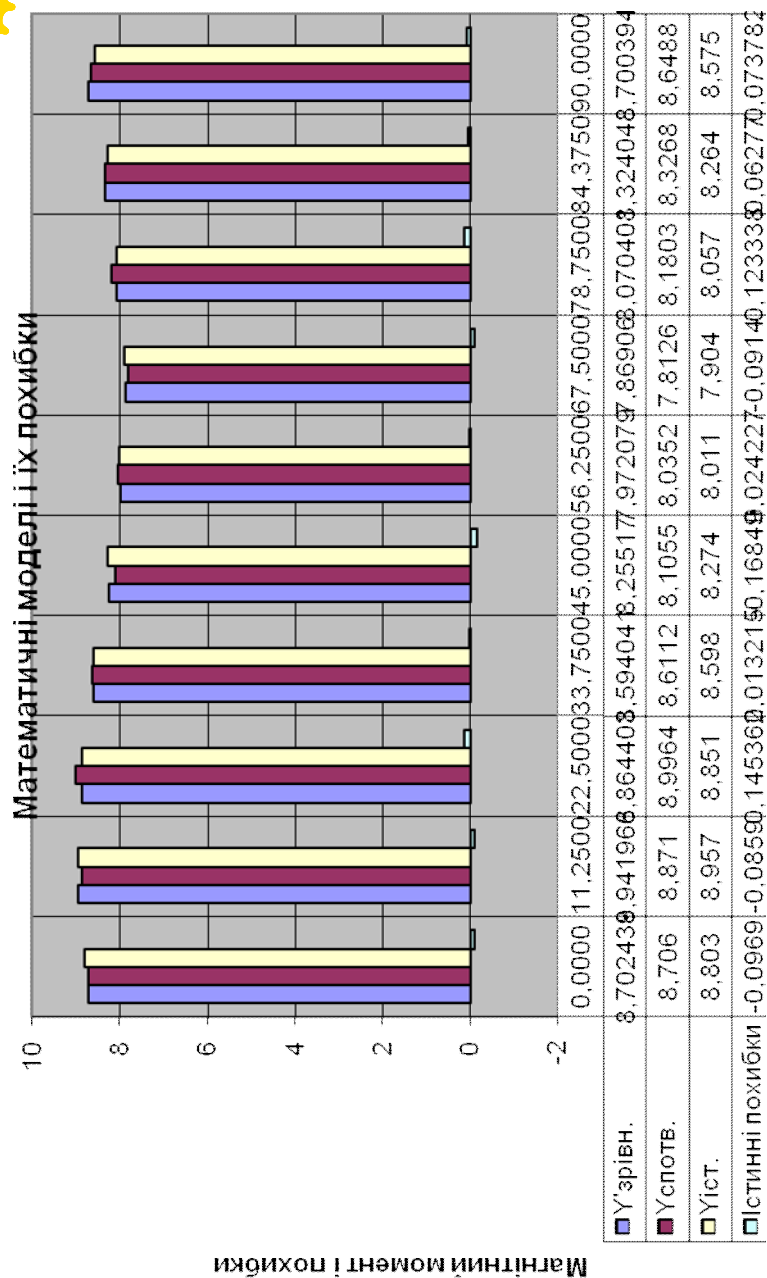


Апроксимация логарифмичною функцією



Істинні і абсолютні похибки





Додаток 11. Таблиці Валецького О.О.

Variant No./ Random values

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
0.14	0.15	0.92	0.65	0.35	0.89	0.79	0.32	0.38	0.46	0.26	0.43	0.38	0.32	0.79	0.5
0.28	0.84	0.19	0.71	0.69	0.39	0.93	0.75	0.1	0.58	0.2	0.97	0.49	0.44	0.59	0.23
0.07	0.81	0.64	0.06	0.28	0.62	0.08	0.99	0.86	0.28	0.03	0.48	0.25	0.34	0.21	0.17
0.06	0.79	0.82	0.14	0.8	0.86	0.51	0.32	0.82	0.3	0.66	0.47	0.09	0.38	0.44	0.6
0.95	0.5	0.58	0.22	0.31	0.72	0.53	0.59	0.4	0.81	0.28	0.48	0.11	0.17	0.45	0.02
0.84	0.1	0.27	0.01	0.93	0.85	0.21	0.1	0.55	0.59	0.64	0.46	0.22	0.94	0.89	0.54
0.93	0.03	0.81	0.96	0.44	0.28	0.81	0.09	0.75	0.66	0.59	0.33	0.44	0.61	0.28	0.47
0.56	0.48	0.23	0.37	0.86	0.78	0.31	0.65	0.27	0.12	0.01	0.9	0.91	0.45	0.64	0.85
0.66	0.92	0.34	0.6	0.34	0.86	0.1	0.45	0.43	0.26	0.64	0.82	0.13	0.39	0.36	0.07
0.26	0.02	0.49	0.14	0.12	0.73	0.72	0.45	0.87	0	0.66	0.06	0.31	0.55	0.88	0.17

Variant No./ Random values

17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32
0.48	0.81	0.52	0.09	0.2	0.96	0.28	0.29	0.25	0.4	0.91	0.71	0.53	0.64	0.36	0.78
0.92	0.59	0.03	0.6	0.01	0.13	0.3	0.53	0.05	0.48	0.82	0.04	0.66	0.52	0.13	0.84
0.14	0.69	0.51	0.94	0.15	0.11	0.6	0.94	0.33	0.05	0.72	0.7	0.36	0.57	0.59	0.59
0.19	0.53	0.09	0.21	0.86	0.11	0.73	0.81	0.93	0.26	0.11	0.79	0.31	0.05	0.11	0.85
0.48	0.07	0.44	0.62	0.37	0.99	0.62	0.74	0.95	0.67	0.35	0.18	0.85	0.75	0.27	0.24
0.89	0.12	0.27	0.93	0.81	0.83	0.01	0.19	0.49	0.12	0.98	0.33	0.67	0.33	0.62	0.44
0.06	0.56	0.64	0.3	0.86	0.02	0.13	0.94	0.94	0.63	0.95	0.22	0.47	0.37	0.19	0.07
0.02	0.17	0.98	0.6	0.94	0.37	0.02	0.77	0.05	0.39	0.21	0.71	0.76	0.29	0.31	0.76
0.75	0.23	0.84	0.67	0.48	0.18	0.46	0.76	0.69	0.4	0.51	0.32	0	0.05	0.68	0.12
0.71	0.45	0.26	0.35	0.6	0.82	0.77	0.85	0.77	0.13	0.42	0.75	0.77	0.89	0.6	0.91

Variant No./ Random values

33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48
0.73	0.63	0.71	0.78	0.72	0.14	0.68	0.44	0.09	0.01	0.22	0.49	0.53	0.43	0.01	0.46
0.54	0.95	0.85	0.37	0.1	0.5	0.79	0.22	0.79	0.68	0.92	0.58	0.92	0.35	0.42	0.01
0.99	0.56	0.11	0.21	0.29	0.02	0.19	0.6	0.86	0.4	0.34	0.41	0.81	0.59	0.81	0.36
0.29	0.77	0.47	0.71	0.3	0.99	0.6	0.51	0.87	0.07	0.21	0.13	0.49	0.99	0.99	0.98
0.37	0.29	0.78	0.04	0.99	0.51	0.05	0.97	0.31	0.73	0.28	0.16	0.09	0.63	0.18	0.59
0.5	0.24	0.45	0.94	0.55	0.34	0.69	0.08	0.3	0.26	0.42	0.52	0.23	0.08	0.25	0.33
0.44	0.68	0.5	0.35	0.26	0.19	0.31	0.18	0.81	0.71	0.01	0	0.03	0.13	0.78	0.38

5 0.28 0.86 0.58 0.75 0.33 0.2 0.83 0.81 0.42 0.06 0.17 0.17 0.76 0.69 0.14
0.73 0.03 0.59 0.82 0.53 0.49 0.04 0.28 0.75 0.54 0.68 0.73 0.11 0.59 0.56 0.28
0.63 0.88 0.23 0.53 0.78 0.75 0.93 0.75 0.19 0.57 0.78 0.18 0.57 0.78 0.05 0.32

Variant No./ Random values

49 50 51 52 53 54 55 56 57 58 59 60 61 62 63 64
0.17 0.12 0.26 0.8 0.66 0.13 0 0.19 0.27 0.87 0.66 0.11 0.19 0.59 0.09 0.21
0.64 0.2 0.19 0.89 0.38 0.09 0.52 0.57 0.2 0.1 0.65 0.48 0.58 0.63 0.27 0.88
0.65 0.93 0.61 0.53 0.38 0.18 0.27 0.96 0.82 0.3 0.3 0.19 0.52 0.03 0.53 0.01
0.85 0.29 0.68 0.99 0.57 0.73 0.62 0.25 0.99 0.41 0.38 0.91 0.24 0.97 0.21 0.77
0.52 0.83 0.47 0.91 0.31 0.51 0.55 0.74 0.85 0.72 0.42 0.45 0.41 0.5 0.69 0.59
0.5 0.82 0.95 0.33 0.11 0.68 0.61 0.72 0.78 0.55 0.88 0.9 0.75 0.09 0.83 0.81
0.75 0.46 0.37 0.46 0.49 0.39 0.31 0.92 0.55 0.06 0.04 0 0.92 0.77 0.01 0.67
0.11 0.39 0 0.98 0.48 0.82 0.4 0.12 0.85 0.83 0.61 0.6 0.35 0.63 0.7 0.76
0.6 0.1 0.47 0.1 0.18 0.19 0.42 0.95 0.55 0.96 0.19 0.89 0.46 0.76 0.78 0.37
0.44 0.94 0.48 0.25 0.53 0.79 0.77 0.47 0.26 0.84 0.71 0.04 0.04 0.75 0.34 0.64

Variant No./ Random values

65 66 67 68 69 70 71 72 73 74 75 76 77 78 79 80
0.62 0.08 0.04 0.66 0.84 0.25 0.9 0.69 0.49 0.12 0.93 0.31 0.36 0.77 0.02 0.89
0.89 0.15 0.21 0.04 0.75 0.21 0.62 0.05 0.69 0.66 0.02 0.4 0.58 0.03 0.81 0.5
0.19 0.35 0.11 0.25 0.33 0.82 0.43 0 0.35 0.58 0.76 0.4 0.24 0.74 0.96 0.47
0.32 0.63 0.91 0.41 0.99 0.27 0.26 0.04 0.26 0.99 0.22 0.79 0.67 0.82 0.35 0.47
0.81 0.63 0.6 0.09 0.34 0.17 0.21 0.64 0.12 0.19 0.92 0.45 0.86 0.31 0.5 0.3
0.28 0.61 0.82 0.97 0.45 0.55 0.7 0.67 0.49 0.83 0.85 0.05 0.49 0.45 0.88 0.58
0.69 0.26 0.99 0.56 0.9 0.92 0.72 0.1 0.79 0.75 0.09 0.3 0.29 0.55 0.32 0.11
0.65 0.34 0.49 0.87 0.2 0.27 0.55 0.96 0.02 0.36 0.48 0.06 0.65 0.49 0.91 0.19
0.88 0.18 0.34 0.79 0.77 0.53 0.56 0.63 0.69 0.8 0.74 0.26 0.54 0.25 0.27 0.86
0.25 0.51 0.81 0.84 0.17 0.57 0.46 0.72 0.89 0.09 0.77 0.77 0.27 0.93 0.8 0

Variant No./ Random values

81 82 83 84 85 86 87 88 89 90 91 92 93 94 95 96
0.81 0.64 0.7 0.6 0.01 0.61 0.45 0.24 0.91 0.92 0.17 0.32 0.17 0.21 0.47 0.72
0.35 0.01 0.41 0.44 0.19 0.73 0.56 0.85 0.48 0.16 0.13 0.61 0.15 0.73 0.52 0.55
0.21 0.33 0.47 0.57 0.41 0.84 0.94 0.68 0.43 0.85 0.23 0.32 0.39 0.07 0.39 0.41
0.43 0.33 0.45 0.47 0.76 0.24 0.16 0.86 0.25 0.18 0.98 0.35 0.69 0.48 0.55 0.62
0.09 0.92 0.19 0.22 0.21 0.84 0.27 0.25 0.5 0.25 0.42 0.56 0.88 0.76 0.71 0.79

0.04 0.94 0.6 0.16 0.53 0.46 0.68 0.04 0.98 0.86 0.27 0.23 0.27 0.91 0
0.85 0.78 0.43 0.83 0.82 0.79 0.67 0.97 0.66 0.81 0.45 0.41 0 0.95 0.38
0.78 0.63 0.6 0.95 0.06 0.8 0.06 0.42 0.25 0.12 0.52 0.05 0.11 0.73 0.92 0.98
0.48 0.96 0.08 0.41 0.28 0.48 0.86 0.26 0.94 0.56 0.04 0.24 0.19 0.65 0.28 0.5
0.22 0.21 0.06 0.61 0.18 0.63 0.06 0.74 0.42 0.78 0.62 0.2 0.39 0.19 0.49 0.45

Variant No./ Random values

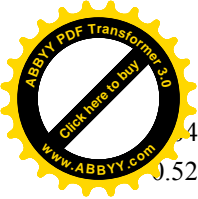
97 98 99 100 101 102 103 104 105 106 107 108 109 110 111 112
0.04 0.71 0.23 0.71 0.37 0.86 0.96 0.09 0.56 0.36 0.43 0.71 0.91 0.72 0.87 0.46
0.77 0.64 0.65 0.75 0.73 0.96 0.24 0.13 0.89 0.08 0.65 0.83 0.26 0.45 0.99 0.58
0.13 0.39 0.04 0.78 0.02 0.75 0.9 0.09 0.94 0.65 0.76 0.4 0.78 0.95 0.12 0.69
0.46 0.83 0.98 0.35 0.25 0.95 0.7 0.98 0.25 0.82 0.26 0.2 0.52 0.24 0.89 0.4
0.77 0.26 0.71 0.94 0.78 0.26 0.84 0.82 0.6 0.14 0.76 0.99 0.09 0.02 0.64 0.01
0.36 0.39 0.44 0.37 0.45 0.53 0.05 0.06 0.82 0.03 0.49 0.62 0.52 0.45 0.17 0.49
0.39 0.96 0.51 0.43 0.14 0.29 0.8 0.91 0.9 0.65 0.92 0.5 0.93 0.72 0.21 0.69
0.64 0.61 0.51 0.57 0.09 0.85 0.83 0.87 0.41 0.05 0.97 0.88 0.59 0.59 0.77 0.29
0.75 0.49 0.89 0.3 0.16 0.17 0.53 0.92 0.84 0.68 0.13 0.82 0.68 0.68 0.38 0.68
0.94 0.27 0.74 0.15 0.59 0.91 0.85 0.59 0.25 0.24 0.59 0.53 0.95 0.94 0.31 0.04

Variant No./ Random values

113 114 115 116 117 118 119 120 121 122 123 124 125 126 127 128
0.99 0.72 0.52 0.46 0.8 0.84 0.59 0.87 0.27 0.36 0.44 0.69 0.58 0.48 0.65 0.38
0.36 0.73 0.62 0.22 0.62 0.6 0.99 0.12 0.46 0.08 0.05 0.12 0.43 0.88 0.43 0.9
0.45 0.12 0.44 0.13 0.65 0.49 0.76 0.27 0.8 0.79 0.77 0.15 0.69 0.14 0.35 0.99
0.77 0 0.12 0.96 0.16 0.08 0.94 0.41 0.69 0.48 0.68 0.55 0.58 0.48 0.4 0.63
0.53 0.42 0.2 0.72 0.22 0.58 0.28 0.48 0.86 0.48 0.15 0.84 0.56 0.02 0.85 0.06
0.01 0.68 0.42 0.73 0.94 0.52 0.26 0.74 0.67 0.67 0.88 0.95 0.25 0.21 0.38 0.52
0.25 0.49 0.95 0.46 0.66 0.72 0.78 0.23 0.98 0.64 0.56 0.59 0.61 0.16 0.35 0.48
0.86 0.23 0.05 0.77 0.45 0.64 0.98 0.03 0.55 0.93 0.63 0.45 0.68 0.17 0.43 0.24
0.11 0.25 0.15 0.07 0.6 0.69 0.47 0.94 0.51 0.09 0.65 0.96 0.09 0.4 0.25 0.22
0.88 0.79 0.71 0.08 0.93 0.14 0.56 0.69 0.13 0.68 0.67 0.22 0.87 0.48 0.94 0.05

Variant No./ Random values

129 130 131 132 133 134 135 136 137 138 139 140 141 142 143 144
0.6 0.1 0.15 0.03 0.3 0.86 0.17 0.92 0.86 0.8 0.92 0.08 0.74 0.76 0.09 0.17
0.82 0.49 0.38 0.58 0.9 0.09 0.71 0.49 0.09 0.67 0.59 0.85 0.26 0.13 0.65 0.54
0.97 0.81 0.89 0.31 0.29 0.78 0.48 0.21 0.68 0.29 0.98 0.94 0.87 0.22 0.65 0.88



0.4 0.85 0.75 0.64 0.01 0.42 0.7 0.47 0.75 0.55 0.13 0.23 0.79 0.64 0.14 0.51
0.52 0.37 0.46 0.23 0.43 0.64 0.54 0.28 0.58 0.44 0.47 0.95 0.26 0.58 0.67 0.82
0.1 0.51 0.14 0.13 0.54 0.73 0.57 0.39 0.52 0.31 0.13 0.42 0.71 0.66 0.1 0.21
0.35 0.96 0.95 0.36 0.23 0.14 0.42 0.95 0.24 0.84 0.93 0.71 0.87 0.11 0.01 0.45
0.76 0.54 0.03 0.59 0.02 0.79 0.93 0.44 0.03 0.74 0.2 0.07 0.31 0.05 0.78 0.53
0.9 0.62 0.19 0.83 0.87 0.44 0.78 0.08 0.47 0.84 0.89 0.68 0.33 0.21 0.44 0.57
0.13 0.86 0.87 0.51 0.94 0.35 0.06 0.43 0.02 0.18 0.45 0.31 0.91 0.04 0.84 0.81

Variant No./ Random values

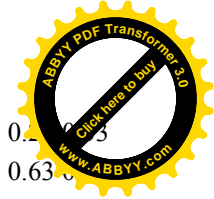
145 146 147 148 149 150 151 152 153 154 155 156 157 158 159 160
0 0.53 0.7 0.61 0.46 0.8 0.67 0.49 0.19 0.27 0.81 0.91 0.19 0.79 0.39 0.95
0.2 0.61 0.41 0.96 0.63 0.42 0.87 0.54 0.44 0.06 0.43 0.74 0.51 0.23 0.71 0.81
0.92 0.17 0.99 0.98 0.39 0.1 0.15 0.91 0.95 0.61 0.81 0.46 0.75 0.14 0.26 0.91
0.23 0.97 0.48 0.94 0.09 0.07 0.18 0.64 0.94 0.23 0.19 0.61 0.56 0.79 0.45 0.2
0.8 0.95 0.14 0.65 0.5 0.22 0.52 0.31 0.6 0.38 0.81 0.93 0.01 0.42 0.09 0.37
0.62 0.13 0.78 0.55 0.95 0.66 0.38 0.93 0.77 0.87 0.08 0.3 0.39 0.06 0.97 0.92
0.07 0.73 0.46 0.72 0.21 0.82 0.56 0.25 0.99 0.66 0.15 0.01 0.42 0.15 0.03 0.06
0.8 0.38 0.44 0.77 0.34 0.54 0.92 0.02 0.6 0.54 0.14 0.66 0.59 0.25 0.2 0.14
0.97 0.44 0.28 0.5 0.73 0.25 0.18 0.66 0.6 0.02 0.13 0.24 0.34 0.08 0.81 0.9
0.71 0.04 0.86 0.33 0.17 0.34 0.64 0.96 0.51 0.45 0.39 0.05 0.79 0.62 0.68 0.56

Variant No./ Random values

161 162 163 164 165 166 167 168 169 170 171 172 173 174 175 176
0.1 0.05 0.5 0.81 0.06 0.65 0.87 0.96 0.99 0.81 0.63 0.57 0.47 0.36 0.38 0.4
0.52 0.57 0.14 0.59 0.1 0.28 0.97 0.06 0.41 0.4 0.11 0.09 0.71 0.2 0.62 0.8
0.43 0.9 0.39 0.75 0.95 0.15 0.67 0.71 0.57 0.7 0.04 0.2 0.33 0.78 0.69 0.93
0.6 0.07 0.23 0.05 0.58 0.76 0.31 0.76 0.35 0.94 0.21 0.87 0.31 0.25 0.14 0.71
0.2 0.53 0.29 0.28 0.19 0.18 0.26 0.18 0.61 0.25 0.86 0.73 0.21 0.57 0.91 0.98
0.41 0.48 0.48 0.82 0.91 0.64 0.47 0.06 0.09 0.57 0.52 0.7 0.69 0.57 0.22 0.09
0.17 0.56 0.71 0.16 0.72 0.29 0.1 0.98 0.16 0.9 0.91 0.52 0.8 0.17 0.35 0.06
0.71 0.27 0.48 0.58 0.32 0.22 0.87 0.18 0.35 0.2 0.93 0.53 0.96 0.57 0.25 0.12
0.1 0.83 0.57 0.91 0.51 0.36 0.98 0.82 0.09 0.14 0.44 0.21 0 0.67 0.51 0.03
0.34 0.67 0.11 0.03 0.14 0.12 0.67 0.11 0.13 0.69 0.9 0.86 0.58 0.51 0.63 0.98

Variant No./ Random values

177 178 179 180 181 182 183 184 185 186 187 188 189 190 191 192
0.31 0.5 0.19 0.7 0.16 0.51 0.51 0.16 0.85 0.17 0.14 0.37 0.65 0.76 0.18 0.35



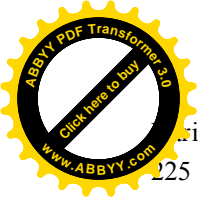
0.15 0.56 0.5 0.88 0.49 0.09 0.98 0.98 0.59 0.98 0.23 0.87 0.34 0.55 0.1
0.16 0.35 0.5 0.76 0.47 0.91 0.85 0.35 0.89 0.32 0.26 0.18 0.54 0.89 0.63
0.32 0.93 0.3 0.89 0.85 0.7 0.64 0.2 0.46 0.75 0.25 0.9 0.7 0.91 0.54 0.81
0.41 0.65 0.49 0.85 0.94 0.61 0.63 0.71 0.8 0.27 0.09 0.81 0.99 0.43 0.09 0.92
0.44 0.88 0.95 0.75 0.71 0.28 0.28 0.9 0.59 0.23 0.23 0.32 0.6 0.97 0.29 0.97
0.12 0.08 0.44 0.33 0.57 0.32 0.65 0.48 0.93 0.82 0.39 0.11 0.93 0.25 0.97 0.46
0.36 0.67 0.3 0.58 0.36 0.04 0.14 0.28 0.13 0.88 0.3 0.32 0.03 0.82 0.49 0.03
0.75 0.89 0.85 0.24 0.37 0.44 0.17 0.02 0.91 0.32 0.76 0.56 0.18 0.09 0.37 0.73
0.44 0.4 0.3 0.7 0.74 0.69 0.21 0.12 0.01 0.91 0.3 0.2 0.33 0.03 0.8 0.19

Variant No./ Random values

193 194 195 196 197 198 199 200 201 202 203 204 205 206 207 208
0.76 0.21 0.1 0.11 0 0.44 0.92 0.93 0.21 0.51 0.6 0.84 0.24 0.44 0.85 0.96
0.37 0.66 0.98 0.38 0.95 0.22 0.86 0.84 0.78 0.31 0.23 0.55 0.26 0.58 0.21 0.31
0.44 0.95 0.76 0.85 0.72 0.62 0.43 0.34 0.41 0.89 0.3 0.39 0.68 0.64 0.26 0.24
0.34 0.1 0.77 0.32 0.26 0.97 0.8 0.28 0.07 0.31 0.89 0.15 0.44 0.11 0.01 0.04
0.46 0.82 0.32 0.52 0.71 0.62 0.01 0.05 0.26 0.52 0.27 0.21 0.11 0.66 0.03 0.96
0.66 0.55 0.73 0.09 0.25 0.47 0.11 0.05 0.57 0.85 0.37 0.63 0.46 0.68 0.2 0.65
0.31 0.09 0.89 0.65 0.26 0.91 0.86 0.2 0.56 0.47 0.69 0.31 0.25 0.7 0.58 0.63
0.56 0.62 0.01 0.85 0.58 0.1 0.07 0.29 0.36 0.06 0.59 0.87 0.64 0.86 0.11 0.79
0.1 0.45 0.33 0.48 0.85 0.03 0.46 0.11 0.36 0.57 0.68 0.67 0.53 0.24 0.94 0.41
0.66 0.8 0.39 0.62 0.65 0.79 0.78 0.77 0.18 0.55 0.6 0.84 0.55 0.29 0.65 0.41

Variant No./ Random values

209 210 211 212 213 214 215 216 217 218 219 220 221 222 223 224
0.26 0.65 0.4 0.85 0.3 0.61 0.43 0.44 0.43 0.18 0.58 0.67 0.69 0.75 0.14 0.56
0.61 0.4 0.68 0 0.7 0.02 0.37 0.87 0.76 0.59 0.13 0.44 0.01 0.71 0.27 0.49
0.47 0.04 0.2 0.56 0.22 0.3 0.53 0.89 0.94 0.56 0.13 0.14 0.07 0.11 0.27 0
0.04 0.07 0.85 0.47 0.33 0.26 0.99 0.39 0.08 0.14 0.54 0.66 0.46 0.45 0.88 0.07
0.97 0.27 0.08 0.26 0.68 0.3 0.63 0.43 0.28 0.58 0.78 0.56 0.98 0.3 0.52 0.35
0.8 0.89 0.33 0.06 0.57 0.57 0.4 0.67 0.95 0.45 0.71 0.63 0.77 0.52 0.54 0.2
0.21 0.14 0.95 0.57 0.61 0.58 0.14 0 0.25 0.01 0.26 0.22 0.85 0.94 0.13 0.02
0.16 0.47 0.15 0.5 0.97 0.92 0.59 0.23 0.09 0.9 0.79 0.65 0.47 0.37 0.61 0.25
0.51 0.76 0.56 0.75 0.13 0.57 0.51 0.78 0.29 0.66 0.64 0.54 0.77 0.91 0.74 0.5
0.11 0.29 0.96 0.14 0.89 0.03 0.04 0.63 0.99 0.47 0.13 0.29 0.62 0.1 0.73 0.4



Variant No./ Random values

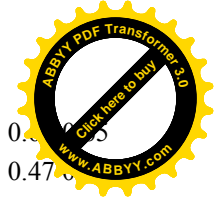
225 226 227 228 229 230 231 232 233 234 235 236 237 238 239 240
0.43 0.75 0.18 0.95 0.73 0.59 0.61 0.45 0.89 0.01 0.93 0.89 0.71 0.31 0.11 0.79
0.04 0.29 0.78 0.28 0.56 0.47 0.5 0.32 0.03 0.19 0.86 0.91 0.51 0.4 0.28 0.7
0.8 0.85 0.99 0.04 0.8 0.1 0.94 0.12 0.14 0.72 0.21 0.31 0.79 0.47 0.64 0.77
0.72 0.62 0.24 0.14 0.25 0.48 0.54 0.54 0.03 0.32 0.15 0.71 0.85 0.3 0.61 0.42
0.28 0.81 0.37 0.58 0.5 0.43 0.06 0.33 0.21 0.75 0.18 0.29 0.79 0.86 0.62 0.23
0.71 0.72 0.15 0.91 0.6 0.77 0.16 0.69 0.25 0.47 0.48 0.73 0.89 0.86 0.65 0.49
0.49 0.45 0.01 0.14 0.65 0.4 0.62 0.84 0.33 0.66 0.39 0.37 0.9 0.03 0.97 0.69
0.26 0.56 0.72 0.14 0.63 0.85 0.3 0.67 0.36 0.09 0.65 0.71 0.2 0.91 0.8 0.76
0.38 0.32 0.71 0.66 0.41 0.62 0.74 0.88 0.88 0 0.78 0.69 0.25 0.6 0.29 0.02
0.28 0.47 0.21 0.04 0.03 0.17 0.21 0.18 0.6 0.82 0.04 0.19 0 0.04 0.22 0.96

Variant No./ Random values

241 242 243 244 245 246 247 248 249 250 251 252 253 254 255 256
0.61 0.71 0.19 0.63 0.77 0.92 0.13 0.37 0.57 0.51 0.14 0.95 0.95 0.01 0.56 0.6
0.49 0.63 0.18 0.62 0.94 0.72 0.65 0.47 0.36 0.42 0.52 0.3 0.81 0.77 0.03 0.67
0.51 0.59 0.06 0.73 0.5 0.23 0.5 0.72 0.83 0.54 0.05 0.67 0.04 0.03 0.86 0.74
0.35 0.13 0.62 0.22 0.24 0.77 0.15 0.89 0.15 0.04 0.95 0.3 0.98 0.44 0.48 0.93
0.33 0.09 0.63 0.4 0.87 0.8 0.76 0.93 0.25 0.99 0.39 0.78 0.05 0.41 0.93 0.41
0.44 0.73 0.77 0.44 0.18 0.42 0.63 0.12 0.98 0.6 0.8 0.99 0.88 0.86 0.87 0.41
0.32 0.6 0.47 0.21 0.56 0.95 0.16 0.23 0.96 0.58 0.64 0.57 0.3 0.21 0.63 0.15
0.98 0.19 0.31 0.95 0.16 0.73 0.53 0.81 0.29 0.74 0.16 0.77 0.29 0.47 0.86 0.72
0.42 0.29 0.24 0.65 0.43 0.66 0.8 0.09 0.8 0.67 0.69 0.28 0.23 0.82 0.8 0.68
0.99 0.64 0 0.48 0.24 0.35 0.4 0.37 0.01 0.41 0.63 0.14 0.96 0.58 0.97 0.94

Variant No./ Random values

257 258 259 260 261 262 263 264 265 266 267 268 269 270 271 272
0.09 0.24 0.32 0.37 0.89 0.69 0.07 0.06 0.97 0.79 0.42 0.23 0.62 0.5 0.82 0.21
0.68 0.89 0.57 0.38 0.37 0.98 0.62 0.3 0.01 0.59 0.37 0.76 0.47 0.16 0.51 0.22
0.89 0.35 0.78 0.6 0.15 0.88 0.16 0.17 0.55 0.78 0.29 0.73 0.52 0.33 0.44 0.6
0.42 0.81 0.51 0.26 0.27 0.2 0.37 0.34 0.31 0.46 0.53 0.19 0.77 0.77 0.41 0.6
0.31 0.99 0.06 0.65 0.54 0.18 0.76 0.39 0.79 0.29 0.33 0.44 0.19 0.52 0.15 0.41
0.34 0.18 0.99 0.48 0.54 0.44 0.73 0.45 0.67 0.38 0.31 0.62 0.49 0.93 0.41 0.91
0.31 0.81 0.48 0.09 0.27 0.77 0.71 0.03 0.86 0.38 0.77 0.34 0.31 0.77 0.2 0.75
0.45 0.65 0.45 0.32 0.2 0.77 0.7 0.92 0.12 0.01 0.9 0.51 0.66 0.09 0.62 0.8



0.49 0.09 0.26 0.36 0.01 0.97 0.59 0.88 0.28 0.16 0.13 0.32 0.31 0.66 0.0
0.28 0.61 0.93 0.26 0.68 0.63 0.36 0.06 0.27 0.35 0.67 0.63 0.03 0.54 0.47

Variant No./ Random values

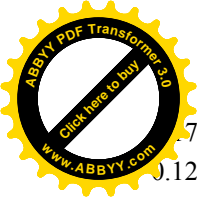
273 274 275 276 277 278 279 280 281 282 283 284 285 286 287 288
0.28 0.03 0.5 0.45 0.07 0.77 0.23 0.55 0.47 0.1 0.58 0.59 0.54 0.87 0.02 0.79
0.08 0.14 0.35 0.62 0.4 0.14 0.51 0.71 0.8 0.62 0.46 0.43 0.62 0.67 0.94 0.56
0.12 0.75 0.31 0.81 0.34 0.07 0.83 0.3 0.33 0.62 0.54 0.23 0.27 0.83 0.94 0.49
0.75 0.38 0.24 0.37 0.2 0.58 0.35 0.31 0.14 0.77 0.11 0.99 0.26 0.06 0.38 0.13
0.34 0.67 0.76 0.87 0.96 0.95 0.97 0.03 0.09 0.83 0.39 0.13 0.07 0.71 0.09 0.87
0.04 0.08 0.59 0.13 0.37 0.46 0.41 0.44 0.28 0.22 0.77 0.26 0.34 0.65 0.94 0.7
0.47 0.45 0.87 0.84 0.77 0.87 0.2 0.19 0.27 0.71 0.52 0.8 0.73 0.17 0.67 0.9
0.77 0.07 0.15 0.72 0.13 0.44 0.47 0.3 0.6 0.57 0 0.73 0.34 0.92 0.43 0.69
0.31 0.13 0.83 0.5 0.49 0.31 0.63 0.12 0.84 0.04 0.25 0.12 0.19 0.25 0.65 0.17
0.98 0.06 0.94 0.11 0.35 0.28 0.01 0.31 0.47 0.01 0.3 0.47 0.81 0.64 0.37 0.88

Variant No./ Random values

289 290 291 292 293 294 295 296 297 298 299 300 301 302 303 304
0.51 0.85 0.29 0.09 0.28 0.54 0.52 0.01 0.16 0.58 0.39 0.34 0.19 0.65 0.62 0.13
0.49 0.14 0.34 0.15 0.95 0.62 0.58 0.65 0.86 0.55 0.7 0.55 0.26 0.9 0.49 0.65
0.2 0.98 0.58 0.03 0.38 0.5 0.72 0.24 0.26 0.48 0.29 0.39 0.72 0.85 0.84 0.78
0.31 0.63 0.05 0.77 0.77 0.56 0.06 0.88 0.87 0.64 0.46 0.24 0.82 0.46 0.85 0.79
0.26 0.03 0.95 0.35 0.27 0.73 0.48 0.03 0.04 0.8 0.29 0 0.58 0.76 0.07 0.58
0.25 0.1 0.47 0.47 0.09 0.16 0.43 0.96 0.13 0.62 0.67 0.6 0.44 0.92 0.56 0.27
0.42 0.04 0.2 0.83 0.2 0.85 0.66 0.11 0.9 0.62 0.54 0.54 0.33 0.72 0.13 0.15
0.35 0.95 0.84 0.5 0.68 0.77 0.24 0.6 0.29 0.01 0.61 0.87 0.66 0.79 0.52 0.4
0.61 0.63 0.42 0.52 0.25 0.77 0.19 0.54 0.29 0.16 0.29 0.91 0.93 0.06 0.45 0.53
0.77 0.99 0.14 0.03 0.73 0.4 0.43 0.28 0.75 0.26 0.28 0.88 0.96 0.39 0.95 0.87

Variant No./ Random values

305 306 307 308 309 310 311 312 313 314 315 316 317 318 319 320
0.94 0.75 0.72 0.91 0.74 0.64 0.26 0.35 0.74 0.55 0.25 0.4 0.79 0.09 0.14 0.51
0.35 0.71 0.11 0.36 0.94 0.1 0.91 0.19 0.39 0.32 0.51 0.91 0.07 0.6 0.2 0.82
0.52 0.02 0.61 0.87 0.98 0.53 0.18 0.87 0.7 0.58 0.42 0.97 0.25 0.91 0.67 0.78
0.13 0.14 0.96 0.99 0 0.9 0.19 0.21 0.16 0.97 0.17 0.37 0.27 0.84 0.76 0.84
0.72 0.68 0.6 0.84 0.9 0.03 0.37 0.7 0.24 0.24 0.29 0.16 0.51 0.3 0.05 0
0.51 0.68 0.32 0.33 0.64 0.35 0.03 0.89 0.51 0.7 0.29 0.89 0.39 0.22 0.33 0.45



7 0.22 0.01 0.38 0.12 0.8 0.69 0.65 0.01 0.17 0.84 0.4 0.87 0.45 0.19 0.6
0.12 0.12 0.28 0.59 0.93 0.71 0.62 0.31 0.3 0.17 0.11 0.44 0.48 0.46 0.4 0.9
0.38 0.9 0.64 0.49 0.54 0.44 0 0.61 0.98 0.69 0.07 0.54 0.85 0.16 0.02 0.63
0.27 0.5 0.52 0.98 0.34 0.91 0.87 0.4 0.78 0.66 0.8 0.88 0.18 0.33 0.85 0.1

Variant No./ Random values

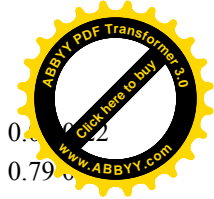
321 322 323 324 325 326 327 328 329 330 331 332 333 334 335 336
0.22 0.83 0.34 0.5 0.85 0.04 0.86 0.08 0.25 0.03 0.93 0.02 0.13 0.32 0.19 0.71
0.55 0.18 0.43 0.06 0.35 0.45 0.5 0.07 0.66 0.82 0.82 0.94 0.93 0.04 0.13 0.77
0.65 0.52 0.79 0.39 0.75 0.17 0.54 0.61 0.39 0.53 0.98 0.46 0.83 0.39 0.36 0.38
0.3 0.47 0.46 0.11 0.99 0.66 0.53 0.85 0.81 0.53 0.84 0.2 0.56 0.85 0.33 0.86
0.21 0.86 0.72 0.52 0.33 0.4 0.28 0.3 0.87 0.11 0.23 0.28 0.27 0.89 0.21 0.25
0.07 0.71 0.26 0.29 0.46 0.32 0.29 0.56 0.39 0.89 0.89 0.89 0.35 0.82 0.11 0.67
0.45 0.62 0.7 0.1 0.21 0.83 0.56 0.46 0.22 0.01 0.34 0.96 0.71 0.51 0.88 0.19
0.09 0.73 0.03 0.81 0.19 0.8 0.04 0.97 0.34 0.07 0.23 0.96 0.1 0.36 0.85 0.4
0.66 0.43 0.19 0.39 0.5 0.97 0.9 0.19 0.06 0.99 0.63 0.95 0.52 0.45 0.3 0.05
0.45 0.05 0.8 0.68 0.55 0.01 0.95 0.67 0.3 0.22 0.92 0.19 0.13 0.93 0.39 0.18

Variant No./ Random values

337 338 339 340 341 342 343 344 345 346 347 348 349 350 351 352
0.56 0.8 0.34 0.49 0.03 0.98 0.2 0.59 0.55 0.1 0.02 0.26 0.35 0.35 0.36 0.19
0.2 0.41 0.99 0.47 0.45 0.53 0.85 0.93 0.81 0.02 0.34 0.39 0.55 0.44 0.95 0.97
0.78 0.37 0.79 0.02 0.37 0.42 0.16 0.17 0.27 0.11 0.17 0.23 0.64 0.34 0.35 0.43
0.94 0.78 0.22 0.18 0.18 0.52 0.86 0.24 0.08 0.51 0.4 0.06 0.66 0.04 0.43 0.32
0.58 0.88 0.56 0.98 0.67 0.05 0.43 0.15 0.47 0.06 0.96 0.57 0.47 0.45 0.85 0.5
0.33 0.23 0.23 0.34 0.21 0.07 0.3 0.15 0.45 0.94 0.05 0.16 0.55 0.37 0.9 0.68
0.66 0.27 0.33 0.37 0.99 0.58 0.51 0.15 0.62 0.57 0.84 0.32 0.29 0.88 0.27 0.37
0.23 0.19 0.89 0.87 0.57 0.14 0.15 0.95 0.78 0.11 0.19 0.63 0.58 0.33 0 0.59
0.4 0.87 0.3 0.68 0.12 0.16 0.02 0.87 0.64 0.96 0.28 0.67 0.44 0.6 0.47 0.74
0.64 0.91 0.59 0.95 0.05 0.49 0.73 0.74 0.25 0.62 0.69 0.01 0.04 0.9 0.37 0.78

Variant No./ Random values

353 354 355 356 357 358 359 360 361 362 363 364 365 366 367 368
0.19 0.86 0.83 0.59 0.38 0.14 0.65 0.74 0.12 0.68 0.04 0.92 0.56 0.48 0.79 0.85
0.56 0.14 0.53 0.72 0.34 0.78 0.67 0.33 0.03 0.9 0.46 0.88 0.38 0.34 0.36 0.34
0.65 0.53 0.79 0.49 0.86 0.41 0.92 0.7 0.56 0.38 0.72 0.93 0.17 0.48 0.72 0.33
0.2 0.83 0.76 0.01 0.12 0.3 0.29 0.91 0.13 0.67 0.93 0.86 0.27 0.08 0.94 0.38



0.79 0.93 0.62 0.01 0.62 0.95 0.15 0.41 0.33 0.71 0.42 0.48 0.92 0.83 0.1
0.01 0.26 0.9 0.14 0.75 0.46 0.68 0.47 0.65 0.35 0.76 0.16 0.47 0.73 0.79
0.75 0.2 0.04 0.9 0.75 0.71 0.55 0.52 0.78 0.19 0.65 0.36 0.21 0.32 0.39 0.26
0.4 0.61 0.6 0.13 0.63 0.58 0.15 0.59 0.07 0.42 0.2 0.2 0.2 0.31 0.87 0.27
0.76 0.05 0.27 0.72 0.19 0 0.55 0.61 0.48 0.42 0.55 0.51 0.87 0.92 0.53 0.03
0.43 0.51 0.39 0.84 0.42 0.53 0.22 0.34 0.15 0.76 0.23 0.36 0.1 0.64 0.25 0.06

Variant No./ Random values

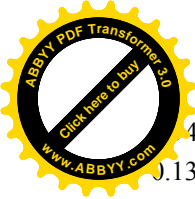
369 370 371 372 373 374 375 376 377 378 379 380 381 382 383 384
0.39 0.04 0.97 0.5 0.08 0.65 0.62 0.71 0.09 0.53 0.59 0.19 0.46 0.58 0.97 0.51
0.41 0.31 0.03 0.48 0.22 0.76 0.93 0.06 0.24 0.74 0.35 0.36 0.32 0.56 0.91 0.6
0.78 0.15 0.47 0.81 0.81 0.15 0.28 0.43 0.66 0.79 0.57 0.06 0.11 0.08 0.61 0.53
0.31 0.5 0.44 0.52 0.12 0.74 0.73 0.92 0.45 0.44 0.94 0.54 0.23 0.68 0.28 0.86
0.06 0.13 0.4 0.84 0.14 0.86 0.37 0.76 0.7 0.09 0.61 0.2 0.71 0.51 0.24 0.91
0.4 0.43 0.02 0.72 0.53 0.86 0.07 0.64 0.82 0.36 0.34 0.14 0.33 0.46 0.23 0.51
0.89 0.75 0.76 0.64 0.52 0.16 0.41 0.37 0.67 0.96 0.9 0.31 0.49 0.5 0.19 0.1
0.85 0.75 0.98 0.44 0.23 0.91 0.98 0.62 0.91 0.64 0.21 0.93 0.99 0.49 0.07 0.23
0.62 0.34 0.64 0.68 0.44 0.11 0.73 0.94 0.03 0.26 0.59 0.18 0.4 0.44 0.37 0.8
0.51 0.33 0.38 0.94 0.52 0.57 0.42 0.39 0.95 0.08 0.29 0.65 0.91 0.22 0.85 0.08

Variant No./ Random values

385 386 387 388 389 390 391 392 393 394 395 396 397 398 399 400
0.55 0.58 0.21 0.57 0.25 0.03 0.1 0.71 0.25 0.7 0.12 0.66 0.83 0.02 0.4 0.29
0.29 0.52 0.52 0.2 0.11 0.87 0.26 0.76 0.75 0.62 0.2 0.41 0.54 0.2 0.51 0.61
0.84 0.16 0.34 0.84 0.75 0.65 0.16 0.99 0.98 0.11 0.61 0.41 0.01 0 0.29 0.96
0.07 0.83 0.86 0.9 0.92 0.91 0.6 0.3 0.28 0.84 0 0.26 0.91 0.04 0.14 0.07
0.92 0.88 0.62 0.15 0.07 0.84 0.24 0.51 0.67 0.09 0.08 0.7 0 0.69 0.92 0.82
0.12 0.06 0.6 0.41 0.83 0.71 0.8 0.65 0.35 0.56 0.72 0.52 0.53 0.25 0.67 0.53
0.28 0.61 0.29 0.1 0.42 0.48 0.77 0.61 0.82 0.58 0.29 0.76 0.51 0.57 0.95 0.98
0.47 0.03 0.56 0.22 0.26 0.29 0.34 0.86 0 0.34 0.15 0.87 0.22 0.98 0.05 0.34
0.98 0.96 0.5 0.22 0.62 0.91 0.74 0.87 0.88 0.2 0.27 0.34 0.2 0.92 0.22 0.24
0.53 0.39 0.85 0.62 0.64 0.76 0.69 0.14 0.9 0.55 0.62 0.84 0.25 0.03 0.91 0.27

Variant No./ Random values

401 402 403 404 405 406 407 408 409 410 411 412 413 414 415 416
0.57 0.71 0.02 0.84 0.02 0.79 0.98 0.06 0.63 0.65 0.82 0.54 0.88 0.92 0.64 0.88
0.02 0.54 0.56 0.61 0.01 0.72 0.96 0.7 0.26 0.64 0.07 0.65 0.59 0.04 0.29 0.09



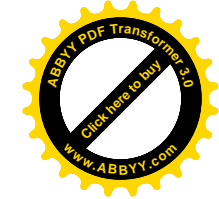
4 0.56 0.81 0.5 0.65 0.26 0.53 0.05 0.37 0.18 0.29 0.41 0.27 0.03 0.36 0.93
0.13 0.78 0.51 0.78 0.6 0.9 0.4 0.7 0.86 0.67 0.11 0.49 0.65 0.58 0.34 0.34
0.34 0.76 0.93 0.38 0.57 0.81 0.71 0.13 0.86 0.45 0.58 0.73 0.67 0.81 0.23 0.01
0.45 0.87 0.68 0.71 0.26 0.6 0.34 0.89 0.13 0.9 0.95 0.62 0 0.99 0.39 0.36
0.1 0.31 0.02 0.91 0.61 0.61 0.52 0.88 0.13 0.84 0.37 0.9 0.99 0.04 0.23 0.17
0.47 0.33 0.63 0.94 0.8 0.45 0.75 0.93 0.14 0.93 0.14 0.05 0.29 0.76 0.34 0.75
0.74 0.81 0.19 0.35 0.67 0.09 0.11 0.01 0.37 0.75 0.17 0.21 0 0.8 0.31 0.55
0.9 0.24 0.85 0.3 0.9 0.66 0.92 0.03 0.76 0.71 0.92 0.2 0.33 0.22 0.9 0.94

Variant No./ Random values

417 418 419 420 421 422 423 424 425 426 427 428 429 430 431 432
0.33 0.46 0.76 0.85 0.14 0.22 0.14 0.47 0.73 0.79 0.39 0.37 0.51 0.7 0.34 0.43
0.66 0.19 0.91 0.04 0.03 0.37 0.51 0.11 0.73 0.54 0.71 0.91 0.85 0.5 0.46 0.44
0.9 0.26 0.36 0.55 0.12 0.81 0.62 0.28 0.82 0.44 0.62 0.57 0.59 0.16 0.33 0.3
0.39 0.1 0.72 0.25 0.38 0.37 0.42 0.18 0.21 0.4 0.88 0.35 0.08 0.65 0.73 0.91
0.77 0.15 0.09 0.68 0.28 0.87 0.47 0.82 0.65 0.69 0.95 0.99 0.57 0.44 0.9 0.66
0.17 0.58 0.34 0.41 0.37 0.52 0.23 0.97 0.09 0.68 0.34 0.08 0 0.53 0.55 0.98
0.49 0.17 0.54 0.17 0.38 0.18 0.83 0.99 0.94 0.46 0.97 0.48 0.67 0.62 0.65 0.51
0.65 0.82 0.76 0.58 0.48 0.35 0.88 0.45 0.31 0.42 0.77 0.56 0.87 0.9 0.02 0.9
0.95 0.17 0.02 0.83 0.52 0.97 0.16 0.34 0.45 0.62 0.12 0.96 0.4 0.43 0.52 0.31
0.17 0.6 0.06 0.65 0.1 0.12 0.41 0.2 0.06 0.59 0.75 0.58 0.51 0.27 0.61 0.78

Variant No./ Random values

433 434 435 436 437 438 439 440 441 442 443 444 445 446 447 448
0.58 0.38 0.29 0.2 0.41 0.97 0.48 0.44 0.23 0.6 0.8 0.07 0.19 0.3 0.45 0.76
0.18 0.93 0.23 0.49 0.22 0.92 0.79 0.65 0.01 0.98 0.75 0.18 0.72 0.12 0.72 0.67
0.5 0.79 0.81 0.25 0.54 0.7 0.95 0.89 0.04 0.55 0.63 0.57 0.92 0.12 0.21 0.03
0.33 0.46 0.69 0.74 0.99 0.23 0.56 0.3 0.25 0.49 0.47 0.8 0.24 0.9 0.11 0.41
0.95 0.21 0.23 0.82 0.81 0.53 0.09 0.11 0.4 0.79 0.07 0.38 0.6 0.25 0.15 0.22
0.74 0.29 0.95 0.81 0.8 0.72 0.47 0.16 0.25 0.91 0.66 0.85 0.45 0.13 0.33 0.12
0.39 0.48 0.04 0.94 0.7 0.79 0.11 0.91 0.53 0.26 0.73 0.43 0.02 0.82 0.44 0.18
0.6 0.41 0.42 0.63 0.63 0.95 0.48 0 0.04 0.48 0 0.26 0.7 0.49 0.62 0.48
0.2 0.17 0.92 0.89 0.64 0.76 0.69 0.75 0.83 0.18 0.32 0.71 0.31 0.42 0.51 0.7
0.29 0.69 0.23 0.48 0.89 0.62 0.76 0.68 0.44 0.03 0.23 0.26 0.09 0.27 0.52 0.49



Василина Василівна Гула

**ПОБУДОВА І ДОСЛІДЖЕННЯ
МАТЕМАТИЧНОЇ МОДЕЛІ
ЗАЛЕЖНОСТІ МАГНІТНОГО МОМЕНТУ
ЗЕМЛІ ВІД ШИРОТИ МЕТОДОМ
СТАТИСТИЧНИХ ВИПРОБУВАНЬ МОНТЕ
КАРЛО**
Апроксимація поліномом третього степеня

Модель ПГБ10-205

Книга написана за матеріалами роботи наукової фізико-
математичної школи МЕНУ

*Науковий керівник – кандидат технічних наук,
доцент Літнарівч Руслан Миколайович*

*Комп'ютерний набір, верстка – дизайн у
редакторі Microsoft® Office 2003® Word*

В.В.Гула

**МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
МІЖНАРОДНИЙ ЕКОНОМІКО-ГУМАНІТАРНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
Ім.акад. С.Дем'янчука**

**Кафедра Математичного моделювання
33027, м.Рівне, Україна
вул.акад. С.Дем'янчука, 4, корпус 1
Телефон: (+00380) 362 23-73-09
Факс: (+00380) 362 23-01-86
E-mail: mail@regi.rovno.ua**

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
МІЖНАРОДНИЙ ЕКОНОМІКО-ГУМАНІТАРНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
Ім.акад. С.Дем'янчука

Г.П.Корзун

**ПОБУДОВА І ДОСЛІДЖЕННЯ
МАТЕМАТИЧНОЇ МОДЕЛІ
ЗАЛЕЖНОСТІ МАГНІТНОГО МОМЕНТУ
ЗЕМЛІ ВІД ШИРОТИ МЕТОДОМ
СТАТИСТИЧНИХ ВИПРОБУВАНЬ МОНТЕ
КАРЛО**

Апроксимація поліномом третього степеня



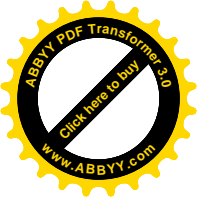
Модель ПГБ-10-208

Науковий керівник:
кандидат технічних наук,
доцент Р. М. Літнарович

Рівне – 2010



Ганна Петрівна Корзун



УДК 53. 02:550.38

Корзун Г.П. Побудова і дослідження математичної моделі залежності магнітного моменту Землі від широти методом статистичних випробувань Монте Карло. Апроксимація поліномом третього степеня. Модель ПГБ-10-208.МЕГУ, Рівне, 2010, 62 с.

Рецензент: В. Г.Бурачек, доктор технічних наук, професор

Відповідальний за випуск: Й. В. Джунь, доктор фізико-математичних наук, професор

Книга написана за матеріалами роботи наукової фізико-математичної школи МЕГУ

Встановлюється функціональна залежність магнітного моменту планети Земля від геомагнітної широти. Дається вивід формули у вигляді поліному третього порядку.

Математична модель будується на основі способу найменших квадратів.

Проводиться дослідження точності зрівноважених елементів методом статистичних випробувань Монте Карло.

Для студентів і аспірантів напрямку наук про Землю.

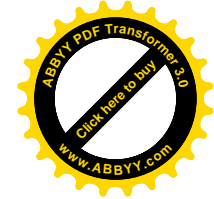
Functional dependence of magnetic moment of planet is set Earth from a geomagnetical breadth. The conclusion of formula is given in a kind to the polynomial of the third order.

A mathematical model is built on the basis of method of leastsquares.

Research of exactness of the balanced elements is conducted by the method of statistical tests of Monte Karlo.

For students and graduate students of direction of sciences about Earth.

© Г.П.Корзун, 2010



ЗМІСТ

Передмова.....	5
Розділ 1. Геомагнітний момент Землі.....	6
1.1. Представлення геомагнітного моменту поля Землі.....	6
1.2. Представлення істинної моделі.....	12
Розділ 2. Побудова спотвореної моделі.....	14
2.1. Генерування істинних похибок для дослідження математичної моделі методом статистичних випробувань Монте Карло.....	14
2.2. Представлення спотвореної моделі.....	16
Розділ 3. Зрівноваження моделі.....	17
3.1. Представлення системи нормальних рівнянь.....	17
3.2. Встановлення коефіцієнтів нормальних рівнянь.....	18
3.3. Рішення нормальних рівнянь способом Крамера	20
Розділ 4. Оцінка точності.....	26
4.1. Контроль зрівноваження	26
4.2. Оцінка точності параметрів, отриманих із системи нормальних рівнянь	26
Висновки.....	32
Літературні джерела	34
Додатки	36

Передмова

Безумовний науковий і практичний інтерес представляє дослідження геомагнітного поля Землі.

Вивченню природи геомагнітного поля і в наш час приділяється велика увага. Вчені намагаються отримати відповіді на запитання: коли і як зародилося магнітне поле земної кулі? Чому воно існує мільярди років? Як це поле буде змінюватись в майбутньому?

В даній роботі ми зробимо спробу виразити один із основних компонентів геомагнітного поля Землі магнітний момент планети графічно і встановити функціональну залежність магнітного моменту від широти.

Нами підбирається емпірична формула у вигляді поліному третього порядку. Математична модель будується на основі способу найменших квадратів. Побудована ймовірніша модель приймається як істинна модель, на основі якої проводяться дослідження точності методом статистичних випробувань Монте Карло. Генеруються псевдо випадкові числа, які приймаються як істинні похибки, якими спотворюється істинна модель.

В подальшому методом найменших квадратів урівноважується спотворена модель і робиться оцінка точності врівноважених елементів. Значення істинних похибок дає можливість зробити порівняльний аналіз. Набирається велика статистика шляхом побудови і дослідження великої кількості моделей.

Розроблена методика дозволить зробити попередній розрахунок точності при проектуванні майбутніх геомагнітних досліджень в будь-якій точці планети Земля.

Розділ 1. Геомагнітний момент Землі

1.1.Представлення геомагнітного моменту поля Землі

Магнітний момент – це векторна величина, яка характеризує земну кулю як джерело магнітного поля. Макроскопічні магнітні моменти створюють замкнуті електричні струми і впорядковано орієнтовані магнітні моменти атомних частинок.

Розрахуємо магнітний момент M Землі на екваторі при $\Phi_{\text{маг. Екв.}}=0$.

При цьому спочатку розглянемо елементи земного магнетизму.

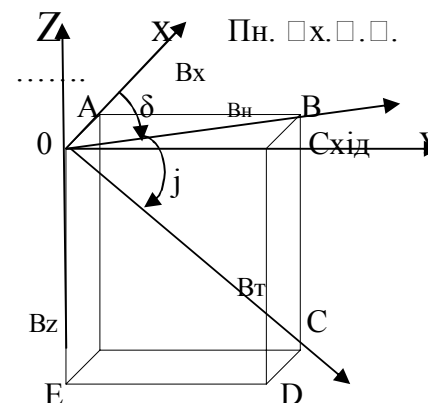


Рис.1.1.Елементи земного магнетизму

Проекції B_z і B_n індукції дипольного поля, або поля однорідного намагнічування Землі, можна знайти за допомогою формул.

Вертикальна складова геомагнітного поля Землі

$$B_z = \mu_0 \frac{M}{2\pi R^3} \sin \Phi_m \quad (1.1);$$

горизонтальна складова

$$B_n = \mu_0 \frac{M}{4\pi R^3} \cos \Phi_m \quad (1.2)$$

де μ_0 – магнітна стала;

M – магнітний момент земної кулі;

R – радіус Землі;

φ_m – геомагнітна широта, яка відраховується від геомагнітного екватора

Із приведених формул легко знайти модуль вектора індукції поля однорідного намагнічування Земної кулі:

$$\beta_T = \sqrt{B_Z^2 + B_H^2} \quad (1.3).$$

Підставляючи (1.1), (1.2) в (1.3), будемо мати:

$$\beta_T = \sqrt{\mu_0^2 \frac{M^2}{2\pi^2 R^6} \left(\sin^2 \varphi_m + \frac{\cos^2 \varphi_m}{4} \right)};$$

або:

$$\beta_T = \mu \frac{M}{2\pi R^3} \sqrt{\frac{4\sin^2 \varphi_m + \cos^2 \varphi_m}{4}}.$$

Приймаючи до уваги, що $\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi = 1$, а $4\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi = 3\sin^2 \varphi + \sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi$;

$$\beta_T = \mu \frac{M}{4\pi R^3} \sqrt{3\sin^2 \varphi + 1} \quad (1.4).$$

Знайдемо магнітний момент M із формули (1.4)

$$M = \frac{4\pi R^3 B_T}{\mu \sqrt{3\sin^2 \varphi_m + 1}} \quad (1.5).$$

Напруженість магнітного поля на магнітному екваторі $H_{\text{екв.}} = 0,34$ ерстеда [3, – с. 163].

Для переходу із системи СГСМ у систему СІ складемо слідууючу пропорцію

$$\text{Напруженості } 1 \frac{a}{m} \text{ відповідає } 4\pi \cdot 10^{-3} e, \\ H_{\text{екв.}} \text{ дорівнює } 0,34 e,$$

звідки

$$H_{\text{екв.}} = \frac{1 \frac{a}{m} \cdot 0,34 e}{4\pi \cdot 10^{-3} e} = 27,05634033 \frac{a}{m}.$$

В загальному випадку напруженість магнітного поля Землі можна розрахувати за формулою

$$H = \frac{B_T}{\mu_0} = \frac{M}{4\pi R^3} \sqrt{3\sin^2 \varphi_m + 1} \quad (1.6).$$

Тоді, загальна формула розрахунку магнітного моменту Землі буде

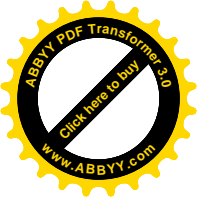
$$M = \frac{4\pi R^3 H}{\sqrt{1 + 3\sin^2 \varphi_m}}. \quad (1.7)$$

Для полюса $H_{\text{пол.}} = 0,66$ ерстед. Тоді, при переході до системи СІ

$$1 \frac{a}{m} \text{ відповідає } 4\pi \cdot 10^{-3} e,$$

$$H_{\text{пол.}} \text{ дорівнює } 0,66 e,$$

звідки



$$H_{\text{пол.}} = \frac{1 \frac{a}{m} \cdot 0,66e}{4\pi \cdot 10^{-3} e} = 52,52113122 \frac{a}{m}.$$

Магнітний момент Землі біля полюсів

$$M_{\text{пол.}} = \frac{H_{\text{пол.}} \cdot 4\pi R^3}{\sqrt{1 + 3 \sin^2 90^\circ}}$$

Взявши радіус земної кулі $R=6371000\text{м}$, а $4\pi R^3 = 3,249620751 \cdot 10^{21} \text{ м}^3$, магнітний момент земної кулі на екваторі буде

$$\frac{M_{\text{екв.}} = \frac{3,249620751 \cdot 10^{21} [\text{м}^3] \cdot 27,05634033 [\frac{a}{m}]}{1}}{1} = 8,792284498 \cdot 10^{22} \text{ ам}^2$$

Розрахуємо магнітний момент земної кулі на полюсі

$$\frac{M_{\text{пол.}} = \frac{3,249620751 \cdot 10^{21} \cdot 52,52113122}{2}}{2} = 8,533687894 \cdot 10^{22} \text{ ам}^2$$

Розрахуємо магнітний момент Землі на широті 45° , прийнявши середнє значення напруженості

$$H_{45^\circ} = \frac{H_0 + H_{90^\circ}}{2} = \frac{0,34e + 0,66e}{2} = 0,50e$$

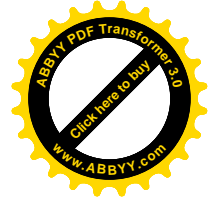
Тоді

$$1 \frac{a}{m} \text{ відповідає } 4\pi \cdot 10^{-3} e$$

$$H_{45^\circ} \text{ дорівнює } 0,5 e.$$

Звідки

$$H_{45^\circ} = \frac{1 \frac{a}{m} \cdot 0,5e}{4\pi \cdot 10^{-3} e} = 39,78873577 \frac{a}{m}$$



Таким чином, напруженість магнітного поля H_{45° буде

$$H_{45^\circ} = \frac{3,249620751 \cdot 10^{21} \text{ м}^3 \cdot 39,78873577 \frac{a}{m}}{\sqrt{1 + 3 \sin^2 45^\circ}}$$

$$H_{45^\circ} = 8,177542602 \cdot 10^{22} \text{ ам}^2$$

Знайдемо середню напруженість магнітного поля Землі для широти $22,5^\circ$

$$H_{22,5^\circ} = \frac{0,34e + 0,5e}{2} = 0,42 e,$$

для $\varphi_{\text{маг.}} = 67,5^\circ$

$$H_{67,5^\circ} = \frac{0,5e + 0,6e}{2} = 0,58e$$

для $\varphi_{\text{маг.}} = 22,5^\circ$

$$1 \frac{a}{m} \text{ відповідає } 4\pi \cdot 10^3 e$$

$$H_{22,5^\circ} \text{ дорівнює } 0,42 e$$

звідки

$$H_{22,5^\circ} = \frac{1 \frac{a}{m} \cdot 0,42e}{4\pi \cdot 10^3 e} = 33,422538 \frac{a}{m},$$

І по аналогії

$$H_{67,5^\circ} = \frac{1 \frac{a}{m} \cdot 0,58e}{4\pi \cdot 10^3 e} = 46,1549335 \text{ ам}^2.$$

Магнітні моменти будуть відповідно

$$\frac{3,249620751 \cdot 10^{21} \cdot 33,42253805}{\sqrt{1 + 3 \sin^2 22,5^0}} = 9,052956514 \cdot 10^{22} \text{ ам}^2,$$

$$M_{67,5^0} = \frac{3,249620751 \cdot 10^{21} \cdot 46,1549335}{\sqrt{1 + 3 \sin^2 67,5^0}} = 7,948506716 \cdot 10^{22} \text{ ам}^2$$

Результати залежності геомагнітного моменту Землі від широти точки спостереження зведено в **Табл 1**.

Таблиця 1. Залежність геомагнітного моменту Землі від широти точки спостереження

№	$\varphi_{\text{маг.}} = X$	$Y = M = f(x) \left(\frac{a}{M} \right)$
1	0,00	$8,79 \cdot 10^{22} *$
2	11,25	$8,9 \cdot 10^{22}$
3	22,5	$9,05 \cdot 10^{22}$
4	33,75	$8,5 \cdot 10^{22}$
5	45	$8,18 \cdot 10^{22}$
6	56,25	$8 \cdot 10^{22}$
7	67,5	$7,95 \cdot 10^{22}$
8	78,75	$8,12 \cdot 10^{22}$
9	90	$8,53 \cdot 10^{22}$
n=9		$\Sigma = 76,02 \cdot 10^{22}$

Згідно формули (1,7) магнітний момент залежить від напруженості магнітного поля і широти точки спостереження, тобто є функцією двох незалежних змінних, хоча в свою чергу напруженість геомагнітного поля також залежить від широти. На жаль, у нас немає формули залежності напруженості магнітного

поля від широти, що не потребувало б знань магнітного моменту і навпаки.

Тому безперечний інтерес представляє встановлення функціональної залежності магнітного моменту, як головного компонента для визначення складових геомагнітного поля Землі, від геомагнітної широти.

Примітка. В подальшому для спрощення викладок множник 10^{22} писати не будемо, але його слід мати на увазі, особливо при оцінці точності результатів.

1.2. Представлення істинної моделі

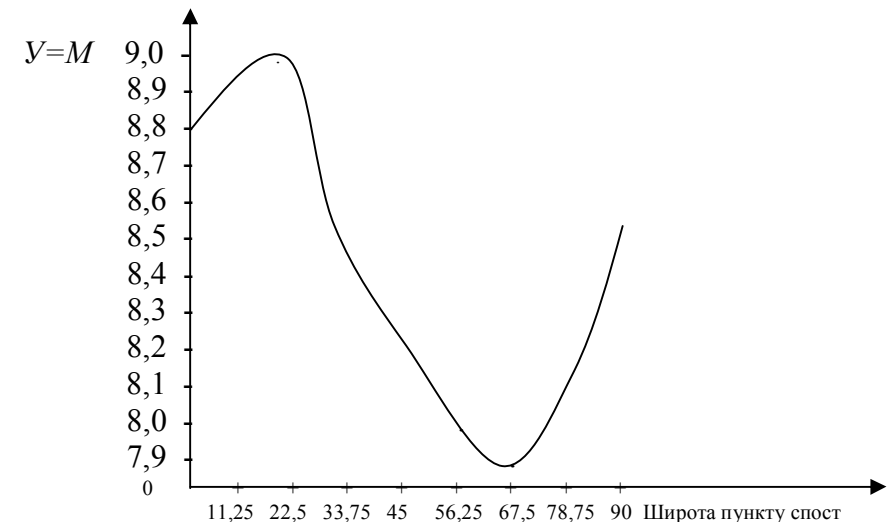


Рис. 1. Графік залежності магнітного моменту земної кулі від геомагнітної широти

Маючи вузлові точки значень геомагнітного моменту Землі в магнітних широтах $0, 22,5^0, 45^0, 67,5^0$ і 90^0 побудуємо точкову діаграму і графік, представлений на рис. 1.

Із цього графіка видно, що екстремум функції буде на широті $22,5^0$ і $67,5^0$. Як видно із графіка, кращою функцією для апроксимації буде кубічний поліном, тобто будемо шукати функціональну залежність у вигляді функції виду

$$y = ax^3 + bx^2 + cx + d \quad (1.2.1)$$

Невідомі коефіцієнти a, b, c, d визначимо по способу найменших квадратів.

Проміжні точки в $11,25^0$, $33,75^0$, $56,25^0$ і $78,75^0$ визначимо безпосередньо із графіка. Цього нам буде цілком достатньо для побудови експериментальної моделі.

Побудовану таким чином експериментальну модель залежності магнітного моменту земної кулі від широти в подальшому зрівноважили і отримали формулу [7,с.38]

$$Y=M=1.2190 \cdot 10^{-5} X^3 - 1.4404 \cdot 10^{-3} X^2 + 2.8370 \cdot 10^{-2} X + 8,8028 \quad (1.2.2)$$

яку приймемо за істинну модель і, генеруючи істинні похибки будемо створювати спотворені моделі, на яких можна дослідити точність визначення магнітного моменту в залежності від похибки визначення широти.

Таблиця 2.Залежність геомагнітного моменту Землі від широти точки спостереження (істинна модель за формулою 1.1)

№	$\varphi_{\text{маг.}} = X$	$Y = M = f(x) \left(\frac{a}{M} \right)$
1	0,00	8,803
2	11,25	8,957
3	22,5	8,851
4	33,75	8,598
5	45	8,274
6	56,25	8,011
7	67,5	7,904
8	78,75	8,057
9	84,375	8,264
10	90	8,575
n=9	489,375	84,294

Розділ 2. Побудова спотвореної моделі

2.1. Генерування істинних похибок для дослідження математичної моделі методом статистичних випробувань Монте Карло

В роботі [1] істинна модель спотворювалась введенням істинних похибок в незалежні змінні X. В даній монографії істинні похибки будемо вводити в експериментальні параметри Y.

Приведемо методику розрахунку випадкових чисел, які приймемо в подальшому, як істинні похибки для побудови спотвореної моделі.

1. Отримавши ряд випадкових (а точніше псевдо-

$$\text{випадкових) чисел } \xi_{cp}, \quad \xi_{cp} = \frac{\sum_{i=1}^n \xi_i}{n}, \quad (2.1.1)$$

Де n – сума випадкових чисел.

2. Розраховуються попередні значення істинних похибок Δ'_i за формулою

$$\Delta'_i = \xi_i - \xi_{cp} \quad (2.1.2)$$

3. Знаходять середню квадратичну похибку попередніх істинних похибок за формулою Гауса

$$m_{\Delta'} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n \Delta'^2_i}{n}} \quad (2.1.3)$$

4. Знаходять коефіцієнт пропорційності K, для визначення істинних похибок необхідності точності

$$K = \frac{c}{m'_{\Delta}}, \quad (2.1.4)$$

де c – необхідна константа.

Так, наприклад, при $m'_{\Delta} = 0,28$ і необхідності побудови математичної моделі з точністю $c = 0,1$, будемо мати

$$K_{0,1} = \frac{0,1}{0,28} = 0,357, \text{ а при } c = 0,05, \text{ отримаємо}$$

$$K = \frac{0,05}{0,28} = 0,178.$$

5. Істинні похибки розраховуються за формулою

$$\Delta_i = \Delta'_i \cdot K \quad (2.1.5)$$

6. Заключним контролем служить розрахунок середньої квадратичної похибки m_{Δ} генерованих істинних похибок Δ

$$m_{\Delta} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n \Delta^2}{n}} \quad (2.1.6)$$

$$\text{і порівняння} \quad m_{\Delta} = c \quad (2.1.7)$$

Таблиця 3. Генерування псевдо-випадкових чисел і розрахунок істинних похибок

№	ξ_i	ξ_{cp}	$\Delta'_i = \xi_i - \xi_{cp}$	$\Delta_i'^2$	$\Delta_i = \Delta'_i \cdot K$	Δ_i^2
1	0,96	0,54	0,42	0,17640	0,1430	0,02045929
2	0,31	0,54	-0,23	0,05290	-0,0783	0,00613547
3	0,24	0,54	-0,3	0,09000	-0,1022	0,01043841
4	0,04	0,54	-0,5	0,25000	-0,1703	0,02899559
5	0,96	0,54	0,42	0,17640	0,14304	0,02045929
6	0,65	0,54	0,11	0,01210	0,03746	0,00140339
7	0,63	0,54	0,09	0,00810	0,03065	0,00093946
8	0,79	0,54	0,25	0,06250	0,08514	0,00724890
9	0,41	0,54	-0,13	0,01690	-0,0443	0,00196010
10	0,41	0,54	-0,13	0,01690	-0,0443	0,00196010
n=10	5,4	5,4	-3E-16	0,86220	-1,8E-16	0,10000000

Середня квадратична похибка попередніх істинних похибок

$$\Delta'_o = \sqrt{\frac{0,86220}{10}} = 0,2936324234$$

$$\text{Коефіцієнт пропорційності } K = \frac{0,1}{0,2936324234} = 0,3405618455$$

Середня квадратична похибка при генеруванні випадкових чисел з точністю $c = 0,1$

$$m_{\Delta_i} = \sqrt{\frac{0,1000000}{10}} = 0,1$$

2.2. Представлення спотвореної моделі

Таблиця 4. Побудова спотвореної моделі

№	Істинна модель		Δ_i	$Y_{спотв.} = Y_{icm.} + \Delta_i$
	x_{icm}	y_{icm}		
1	0	8,803	0,1430	8,946
2	11,25	8,957	-0,0783	8,879
3	22,5	8,851	-0,1022	8,7488
4	33,75	8,598	-0,1703	8,4277
5	45	8,274	0,14304	8,4170
6	56,25	8,011	0,03746	8,0485
7	67,5	7,904	0,03065	7,9347
8	78,75	8,057	0,08514	8,1421
9	84,375	8,264	-0,0443	8,2197
10	90	8,575	-0,0443	8,5307
	489,375	84,294	-1,8E-16	84,294

По даним спотвореної моделі виконують строге зрівноваження методом найменших квадратів і отримують ймовірнішу модель, роблять оцінку точності зрівноважених елементів і дають порівняльний аналіз.

Розділ 3. Зрівноваження моделі

3.1. Представлення системи нормальних рівнянь

У результаті проведеного експерименту ми маємо ряд результатів X_i, V_i , функціональну залежність між якими будемо шукати за допомогою поліному степені K , де коефіцієнти a_i являються невідомими.

Тоді, система нормальних рівнянь буде

$$\begin{aligned} na_0 + a_3[x] + a_2[x^2] + \dots + a_m[x^m] - [y] &= 0, \\ a_0[x] + a_3[x^2] + a_2[x^3] + \dots + a_m[x^{m+1}] - [xy] &= 0, \\ a_0[x^2] + a_1[x^3] + a_2[x^4] + \dots + a_m[x^{m+1}] - [x^2y] &= 0, \end{aligned} \quad (3.1.1)$$

$$a_0[x^m] + a_1[x^{m+1}] + a_2[x^{m+2}] + \dots + a_m[x^{2m}] - [x^m y] = 0,$$

де знаком $[\]$ позначена сума відповідного елемента.

Для поліному третього порядку виду

$$y = ax^3 + bx^2 + cx + d \quad (3.1.2)$$

Система нормальних рівнянь буде

$$\begin{aligned} dn + c[x] + b[x^2] + a[x^3] - [y] &= 0, \\ d[x] + c[x^2] + b[x^3] + a[x^4] - [xy] &= 0, \\ d[x^2] + c[x^3] + b[x^4] + a[x^5] - [x^2y] &= 0, \\ d[x^3] + c[x^4] + b[x^5] + a[x^6] - [x^3y] &= 0. \end{aligned} \quad (3.1.3)$$

або

$$\begin{aligned} a[x^6] + b[x^5] + c[x^4] + d[x^3] - [x^3y] &= 0, \\ a[x^5] + b[x^4] + c[x^3] + d[x^2] - [x^2y] &= 0, \\ a[x^4] + b[x^3] + c[x^2] + d[x] - [xy] &= 0, \\ a[x^3] + b[x^2] + c[x] + dn - [y] &= 0. \end{aligned} \quad (3.1.4)$$

В подальшому будемо рішати систему лінійних нормальних рівнянь (3.1.3) або (3.1.4) одним із відомих в математиці способів.

3.2. Встановлення коефіцієнтів нормальних рівнянь

Приведемо розрахункову таблицю, на основі якої стримують коефіцієнти нормальних рівнянь.

Таблиця 5. Розрахунок коефіцієнтів нормальних рівнянь

№	$x_{істн.}$	$y_{спов.}$	x^0	x^2	x^3	x^4	x^5
1	0	8,946	1	0	0	0	0
2	11,25	8,879	1	126,563	1423,828	16018,066	180203,247
3	22,5	8,7488	1	506,250	11390,625	256289,063	5766503,906
4	33,75	8,4277	1	1139,063	38443,359	1297463,379	43789389,038
5	45	8,4170	1	2025,000	91125,000	4100625,000	184528125,000
6	56,25	8,0485	1	3164,063	177978,516	10011291,504	563135147,095
7	67,5	7,9347	1	4556,250	307546,875	20759414,063	1401260449,219
8	78,75	8,1421	1	6201,563	488373,047	38459377,441	3028675973,511
9	84,375	8,2197	1	7119,141	600677,490	50682163,239	4276307523,251
10	90	8,5307	1	8100,000	729000,000	65610000,000	5904900000,000
Σ	489,375	84,294	10	32937,891	2445958,740	191192641,754	15408543314,266

Продовження таблиці 5

№	x^6	xy	x^2y	x^3y
1	0	0	0	0
2	2027286,530	99,8850462	1123,707	12641,70116
3	129746337,891	196,848708	4429,096	99654,65819
4	1477891880,035	284,435519	9599,699	323989,8332
5	8303765625,000	378,766619	17044,5	767002,4032
6	31676352024,078	452,725976	25465,84	1432453,285
7	94585080322,266	535,588913	36152,25	2440276,986
8	238508232913,971	641,193561	50493,99	3976401,945
9	360813447274,268	693,539462	58517,39	4937404,961
10	531441000000,000	767,765426	69098,89	6218899,954
Σ	1266937543664,040	4050,749	271925,4	20208725,7

Таким чином, на основі проведених розрахунків нами отримана наступна матриця коефіцієнтів нормальних рівнянь

10,0	489,4	32937,9	2445958,7
489,4	32937,9	2445958,7	191192641,8
32937,9	2445958,7	191192641,8	15408543314,3
2445958,7	191192642	15408543314,3	1266937543664,0

3.3. Рішення системи лінійних рівнянь способом Крамера

Нехай, маємо систему лінійних рівнянь

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2, \\ &\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n &= b_n. \end{aligned} \quad (3.3.1)$$

Для того, щоб із цієї системи визначити невідомі x , складемо із коефіцієнтів при невідомих визначник Δ , який називається визначником системи рівнянь (3.3.1).

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \quad (3.3.2)$$

Помножимо ліву і праву частини рівності (3.3.2) на x_i . В лівій частині будемо мати Δx_i , в правій же частині введемо у всі члени i -го стовпчика визначника a_k і множник x_i

$$\Delta \cdot x_i = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1i}x_i & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2i}x_i & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{ni}x_i & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \quad (3.3.3)$$

Потім до i -го стовпчика визначника (3.3.3) додамо всі інші стовпчики, помножені відповідно на x_1, x_2, \dots, x_n . Величина визначника від цього не зміниться. Тоді i -стовпчик представить собою ліву частину системи рівнянь (3.3.1).

Замінімо його вільними членами цієї системи і позначимо через Δ_i

$$\Delta \cdot x_i = \Delta_i = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & b_1 \dots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & b_2 \dots a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & b_n \dots a_{nn} \end{vmatrix} \quad (3.3.4)$$

$$\text{Звідки, } x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & b_1 \dots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & b_2 \dots a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & b_n \dots a_{nn} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \dots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \dots a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} \dots a_{nn} \end{vmatrix}}. \quad (3.3.5)$$

Формула (3.3.5) дає можливість визначити кожне невідоме системи лінійних рівнянь (3.3.1).

Якщо вільні члени системи лінійних рівнянь рівні нулю, то вона буде системою лінійних однокорінних рівнянь.

Система лінійних одно корінних рівнянь може мати рішення відмінне від нульового, якщо визначник системи Δ рівний нулю.

Для системи чотирьох лінійних рівнянь

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 &= b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 &= b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + a_{34}x_4 &= b_3, \\ a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + a_{43}x_3 + a_{44}x_4 &= b_4, \end{aligned} \quad (3.3.6)$$

якщо визначник системи Δ не дорівнює нулю

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} \neq 0, \quad (3.3.7)$$

то система визначника і по Крамеру її невідомі виражаються формулами

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ b_4 & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}}{\Delta}, \quad (3.3.8)$$

$$x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & b_4 & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}}{\Delta}, \quad (3.3.9)$$

$$x_3 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & b_2 & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & b_3 & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & b_4 & a_{44} \end{vmatrix}}{\Delta}, \quad (3.3.10)$$

$$x_4 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & b_3 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & b_4 \end{vmatrix}}{\Delta} \quad (3.3.11)$$

Як бачимо, що

$$\Delta_{x_1} = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ b_4 & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}, \quad (3.3.12)$$

$$\Delta_{x_2} = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & b_4 & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}, \quad (3.3.13)$$

$$\Delta_{x_3} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & b_2 & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & b_3 & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & b_4 & a_{44} \end{vmatrix}, \quad (3.3.14)$$

$$\Delta_{x_4} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & b_3 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & b_4 \end{vmatrix}. \quad (3.3.15)$$

Приведемо формулу знаходження визначника четвертого порядку

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = (a_{23}a_{43} - a_{33}a_{42})(a_{11}a_{24} - a_{14}a_{21}) + \\ + (a_{32}a_{44} - a_{34}a_{42})(a_{13}a_{21} - a_{11}a_{23}) + (a_{31}a_{43} - a_{33}a_{41})(a_{14}a_{22} - a_{12}a_{24}) + \\ + (a_{31}a_{42} - a_{32}a_{41})(a_{13}a_{24} - a_{14}a_{23}) + (a_{33}a_{44} - a_{34}a_{43})(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) + \\ + (a_{31}a_{44} - a_{34}a_{41})(a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22}). \quad (3.3.16)$$

І в нашому випадку визначник системи $D = 1,38204E+21$

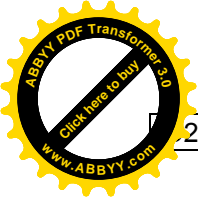
1266937543664,0 4	15408543314,27	191192642	2445959
15408543314,266	191192642	2445959	32937,891
191192641,754	2445959	32938	489
2445958,740	32938	489	10

20208725,7263	15408543314	191192642	2445959
271925,36058	191192642	2445959	32938
4050,7492311	2445959	32938	489
84,294000000	32938	489	10
D1=		1,08469E+16	

тоді невідомий коефіцієнт a при x^3 буде

$$\dot{a} = \tilde{\sigma}_1 = \frac{D1}{D} = \frac{1.08469E + 16}{1.38204E + 21} = 0,000007848;$$

1266937543664	20208725,726	191192642	2445959
15408543314	271925,361	2445959	32938
191192642	4050,749	32938	489,375
2445959	84,2940	489,375	10



D2=	-1,1596E+18		
-----	-------------	--	--

тоді невідомий коефіцієнт b при x^2 буде

$$b = \tilde{\delta}_2 = \frac{D2}{D} = \frac{-1.1596E+18}{1.38204E+21} = -0,000839;$$

1266937543664	15408543314	20208726	2445958,7
15408543314	191192642	271925	32937,891
191192642	2445959	4051	489,375
2445959	32938	84,294	10
D3=	9,8904E+18		

і невідомий коефіцієнт c при x буде

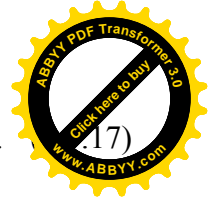
$$\tilde{n} = \tilde{\delta}_3 = \frac{D3}{D} = \frac{9,8904E+18}{1.38204E+21} = 0,007156;$$

1266937543664	15408543314	191192642	20208726
15408543314	191192642	2445959	271925
191192642	2445959	32938	4051
2445959	32938	489,375	84,294
D4=	1,2332E+22		

коефіцієнт d буде

$$d = \frac{D4}{D} = \frac{1,2332E+22}{1.38204E+21} = 8,923190.$$

Таким чином, на основі проведених досліджень, математична модель залежності магнітного моменту планети Земля y_i від широти пункту спостереження x_i виражається формулою



$$y' = 0,000007848x^3 - 0,000839x^2 + 0,007156x + 8,923190.$$

Розділ 4. Оцінка точності

4.1. Контроль зрівноваження

Підставляючи отримані значення коефіцієнтів a, b, c, d у формулу (3.4), отримаємо наступні результати.

Таблиця 6. Коефіцієнти нормальних рівнянь і контроль зрівноваження

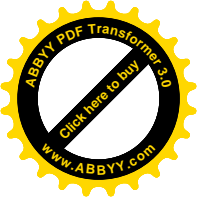
	x^3	x^2	x	x^0	y	Контроль
x^3	1266937543664,04	15408543314,27	191192642	2445959	20208725,73	20208725,726
x^2	15408543314,266	191192642	2445959	32937,891	271925,361	271925,361
x	191192641,754	2445959	32938	489	4050,749	4050,749
x^0	2445958,740	32938	489	10	84,294	84,294
	0,000007848	-0,000839	0,007156	8,923190		
	Ошибка! Объект не может быть создан из кодов полей редактирования.	b	c	d		

$$[YU] - d[YX^3] - b[YX^2] - c[YX] - d[Y] -$$

$$= 0,041291387. \quad \text{З другої сторони } [VV] = 0,041291$$

4.2. Оцінка точності параметрів, отриманих із рішення системи нормальних рівнянь

Середні квадратичні похибки визначаємих x_1, x_2, x_3, x_4 розраховуються за формулами:



$$m_{x_1} = \mu \sqrt{\frac{A_{11}}{D}}, \quad (4.2.1)$$

$$m_{x_2} = \mu \sqrt{\frac{A_{22}}{D}}, \quad (4.2.2)$$

$$m_{x_3} = \mu \sqrt{\frac{A_{33}}{D}}, \quad (4.2.3)$$

$$m_{x_4} = \mu \sqrt{\frac{A_{44}}{D}}, \quad (4.2.4)$$

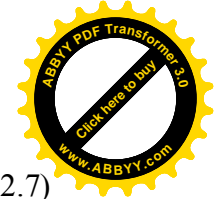
де $m_{x_1}, m_{x_2}, m_{x_3}, m_{x_4}$ – середні квадратичні похибки визначаємих невідомих x_1, x_2, x_3, x_4 , μ – середня квадратична похибка одиниці ваги, яка розраховується за формулою

$$\mu = \sqrt{\frac{[VV]}{n - K}} \quad (4.2.5)$$

У формулі (4.2.5) n - число початкових рівнянь, K - число невідомих. В нашому випадку $n = 10; K = 4$. V - різниця між вихідним значенням y_i і вирахуванням значенням y' за отриманою нами формулою (3.3.17);

$$V_i = y_i - y'_i \quad (4.2.6)$$

$A_{11}, A_{22}, A_{33}, A_{44}$ – алгебраїчні доповнення першого, другого, третього і четвертого діагональних елементів



$$A_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}, \quad (4.2.7)$$

$$A_{22} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} & a_{14} \\ a_{31} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}, \quad (4.2.8)$$

$$A_{33} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{24} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{vmatrix}, \quad (4.2.9)$$

$$A_{44} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad (4.2.10)$$

$$\text{де } \Delta = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} + a_{14}A_{14}. \quad (4.2.11)$$

Приведемо формулу розкриття визначника третього порядку

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) + a_{12}(a_{23}a_{31} - a_{21}a_{33}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}). \quad (4.2.12)$$

І в нашому випадку отримаємо

		191192642	2445959	32938
A11=	4,7761E+11	2445959	32938	489,375
		32937,891	489,375	10

величина оберненої ваги

$$\frac{1}{P_{x_1}} = \frac{A_{11}}{D} = \frac{4.7761E+11}{1.38204E+21} = 3.45593E-10, \text{ а}$$

$$\sqrt{\frac{1}{P_{x_{11}}}} = 0,00001859.$$

		1266937543664	191192642	2445959
A22=	8,99382E+15	191192642	32938	489,375
		2445959	489	10

$$\frac{1}{P_{x_2}} = \frac{A_{22}}{D} = \frac{8,99382E+15}{1.38204E+21} = 0,000006508; \sqrt{\frac{1}{P_{x_{22}}}} = 0,00255.$$

A33=	1,24719,E+19	1266937543664	15408543314	2445959
		15408543314	191192642	32938
		2445959	32938	10

$$\frac{1}{P_{x_3}} = \frac{A_{33}}{D} = \frac{1,24719E+19}{1.38204E+21} = 0,00902; \sqrt{\frac{1}{P_{x_{33}}}} = 0,0950.$$

		1266937543664	15408543314	191192642
A44=	1,1858101,E+21	15408543314	191192642	2445959
		191192642	2445959	32938

$$\frac{1}{D_{\delta_4}} = \frac{A_{44}}{D} = \frac{1,1858101E+21}{1.38204E+21} = 0,8580; \sqrt{\frac{1}{P_{x_{44}}}} = 0,9263.$$

Підставляючи у виведену нами, формулу (3.3.17) значення X спотвореної моделі отримаємо розрахункові значення y' , які будуть дещо відрізнятися від вихідних значень Y .

Таблиця 6. порівняльний аналіз результатів строгого зрівноваження

№	$x_{\text{істн.}}$	$y_{\text{спотв.}}$	$y'_{\text{зрівноваж.}}$	$V = y_i - y'_i$	V^2
1	0	8,803	8,9231896	2,285E-02	0,000521958
2	11,25	8,957	8,9086798	-3,001E-02	0,00090054
3	22,5	8,851	8,7488305	9,948E-07	9,89574E-13
4	33,75	8,598	8,5106908	-8,297E-02	0,006884302
5	45	8,274	8,2613099	1,557E-01	0,02425062
6	56,25	8,011	8,0677369	-1,928E-02	0,000371528
7	67,5	7,904	7,9970209	-6,237E-02	0,003890061
8	78,75	8,057	8,1162111	2,593E-02	0,000672329
9	84,375	8,264	8,2679739	-4,825E-02	0,00232777
10	90	8,575	8,4923567	3,837E-02	0,001472278
$n=10$	489,375	84,294	84,29	0,0000000	0,041291

Тоді, середня квадратична похибка одиниці ваги буде

$$\mu = \sqrt{\frac{[VV]}{n-K}} = 0,082957204$$

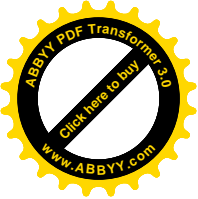
Середня квадратична похибка визначення коефіцієнта a

$$m_a = \mu \sqrt{\frac{1}{P_a}} = 0,082957204 * 0,00001859 = 1,54217E-06$$

Середня квадратична похибка визначення коефіцієнта b

$$m_b = \mu \sqrt{\frac{1}{P_b}} = 0,082957204 * 0,00255 = 0,000211625$$

Середня квадратична похибка визначення коефіцієнта c



$$m_{\tilde{n}} = \mu \sqrt{\frac{1}{P_{\tilde{n}}}} = 0,082957204 * 0,0950 = 0,007880641$$

Середня квадратична похибка визначення коефіцієнта d

$$m_d = \mu \sqrt{\frac{1}{P_d}} = 0,082957204 * 0,9263 = 0,076842591.$$

Середні квадратичні похибки зрівноваженої функції $m\varphi=$

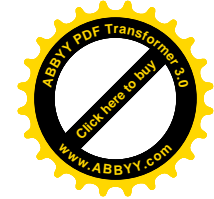
0,07684259
0,0475234
0,05050351
0,04639925
0,041920
0,04631778
0,04928956
0,04201214
0,04504937
0,06733738

Перевірка моделі на адекватність за критерієм Фішера

		51,1630
	F=	5
	F>F(0,05;3;6)	
F(0,05;4;6)	4,53367	
=	7	
Модель адекватна експериментальним даним		

Встановлення значимості коефіцієнтів регресії

Коефіцієнти регресії значимі			
ta=	5,089244	t(0,05;6)=	2,44691
tb=	3,964877		2
tc=	0,9081	t(0,08;6)=	2,10430



			6
td=	116,123		

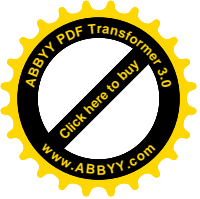
Висновки

На основі проведених досліджень в даній роботі:

1. Генеровані випадкові числа, які приведено до нормованої досліджуваної точності.
2. На основі істинної моделі і генерованих істинних похибок побудована спотворена модель залежності магнітного моменту Землі від широти.
3. Математична модель апроксимована по способу найменших квадратів кубічним поліномом.
4. Отримана формула
 $y' = 0,000007848x^3 - 0,000839x^2 + 0,007156x + 8,923190.$
залежності магнітного моменту Землі Y від широти X .

Встановлено, що середня квадратична похибка одиниці ваги за результатами зрівноваження складає
 $\mu = 0,082957204 * 10^{22} \text{ ам}^2.$

5. Середня квадратична похибка визначення коефіцієнта a при x^3 $m_a = 1,54217E - 06;$
 - середня квадратична похибка визначення коефіцієнта b при x^2 $m_b = 0,000211625;$

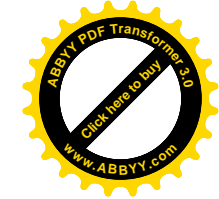


- середня квадратична похибка визначення коефіцієнта c при x $m_c = 0,007880641$;
- середня квадратична похибка визначення коефіцієнта d при $m_d = 0,076842591$.

середні квадратичні похибки зрівноваженої функції $m_f =$

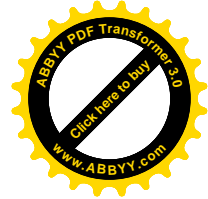
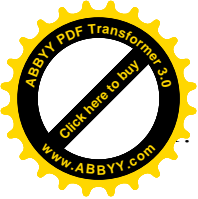
0,076842591
0,076842591
0,076842591
0,076842591
0,076842591
0,076842591
0,076842591
0,076842591
0,076842591

6. Розроблена методика підготовки істинних похибок наперед заданої точності.
7. Дана робота відкриває дорогу для проведення досліджень методом статистичних випробувань Монте Карло.
8. Вона дає можливість охопити велику аудиторію, тому що генеруються похибки індивідуально і вони не повторюються в других моделях.
9. Робота виконується вперше. Нам не відомі літературні джерела, де б виконувались аналогічні дослідження в курсі Фізики з основами геофізики.



Літературні джерела

1. Букеєв Б.О. Дослідження точності апроксимації залежності магнітного моменту Землі від широти методом статистичних випробувань Монте Карло. Модель ПГБ 61-.МЕГУ, Рівне, 2006, -29с.
2. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике. – М.: Наука, 1973,-831с.
3. Кошкин Н. И., Ширкевич М. Г. Справочник по элементарной физике. – М.: Наука, 1972,-255с.
4. Кучерук І. М., Горбачук І. Т., Луцик П. П. Загальний курс фізики. Т. 1. – К.: Техніка, 1999,-536с.
5. Кучерук І. М., Горбачук І. Т., Луцик П. П. Загальний курс фізики. Т. 2. – К.: Техніка, 1999,-452с.
6. Кучерук І. М., Горбачук І. Т. Загальний курс фізики. Т.3 . – К.: Техніка, 1999,-520с.
7. Літнарівич Р. М. Дослідження точності апроксимації залежності магнітного моменту Землі від широти методом статистичних випробувань Монте Карло. Частина 1. МЕГУ, Рівне, 2006,-44с.
8. Літнарівич Р.М. Встановлення зв'язку між географічною і геомагнітною системами координат. Частина 2.МЕГУ,Рівне,2006,-47с.
9. Літнарівич Р.М. Фізика з основами геофізики. Курс лекцій.МЕГУ,Рівне,2007,-78с.
10. Літнарівич Р.М. Фізика з основами геофізики. Лабораторний практикум. Частина 1.МЕГУ,Рівне,2007,-44с.



- Літнарів Р.М. Фізика з основами геофізики. Лабораторний практикум. Частина 2. МЕНУ, Рівне, 2008, - 48с.
12. Мудров В. И., Кушко В. Л. Методы обработки измерений. – М.: Сов. радио, 1976, -192с.
 13. Пастушенко С. М. Формули і закони загальної фізики: навчальний посібник для студентів вищих навчальних закладів. 2е вид.: Діал., 2005, -266с.
 14. Рого К. Г. Метрологическая обработка результатов технических измерений. Справочное пособие. – К.: Техніка, 1987, -126с.
 15. Розв'язування задач з курсу загальної фізики. Практикум/Остроухов А. А., Стрижевський В. Л., Цвілих М. Г. та інші. –К.: Радянська школа, 1966, -503с
 16. Савельев И. В. Курс физики. Т.1. –М.: Наука, 1989, -352с
 17. Савельев И. В. Курс физики. Т.2. –М.: Наука, 1989, -464с
 18. Савельев И. В. Курс общей физики. –М.: Наука, 1982, - 304с
 19. Ситніков О. П. Основы электродинамики. Лабораторный практикум. Чернігів: ЧДІЕіУ, 2003, -48с
 20. Суботін С. І. Кора і мантія Землі. –К.: Знання, 1996, -39с.
 21. Топографо-геодезические термины: справочник/ Кузьмин Б. С., Герасимов Ф. Я., Молоканов В. М. и др. – М.: Недра, 1989, -261с.
 22. Федоров Є. П. Обертання Землі. – К.: Знання, 1966, -52с
 23. Фізика з використанням обчислювальної техніки. Практичний курс/ В. М. Казанський, В. І. Кланченко, Д. Кошелева та ін. – К.: Либідь, 1993, -224с.

Додатки

Додаток 1.

Генерування псевдовипадкових чисел, підпорядкування їх нормальному закону розподілу і розрахунок істинних похибок

0,96	0,54	0,42	0,17640	0,1430	0,02045929
0,31	0,54	-0,23	0,05290	-0,0783	0,00613547
0,24	0,54	-0,3	0,09000	-0,1022	0,01043841
0,04	0,54	-0,5	0,25000	-0,1703	0,02899559
0,96	0,54	0,42	0,17640	0,14304	0,02045929
0,65	0,54	0,11	0,01210	0,03746	0,00140339
0,63	0,54	0,09	0,00810	0,03065	0,00093946
0,79	0,54	0,25	0,06250	0,08514	0,00724890
0,41	0,54	-0,13	0,01690	-0,0443	0,00196010
0,41	0,54	-0,13	0,01690	-0,0443	0,00196010
5,4	5,4	-3E-16	0,86220	-1,8E-16	0,10000000
A	B	C	D	E	F

Додаток 2.

Побудова спотвореної моделі

0	8,803	0,1430	8,946
11,25	8,957	-0,0783	8,879
22,5	8,851	-0,1022	8,7488
33,75	8,598	-0,1703	8,4277
45	8,274	0,14304	8,4170
56,25	8,011	0,03746	8,0485
67,5	7,904	0,03065	7,9347
78,75	8,057	0,08514	8,1421
84,375	8,264	-0,0443	8,2197
90	8,575	-0,0443	8,5307
489,375	84,294	-1,8E-16	84,294

I	G	E	H
Хексп.=Хістн.	Уістн.	Істинні похиб.	Усптв.

Додаток 3.

Розрахункова таблиця

0	1	0	0	0	0	0
11,25	1	126,563	1423,828	16018,066	180203,247	2027286,530
22,5	1	506,250	11390,625	256289,063	5766503,906	129746337,891
33,75	1	1139,063	38443,359	1297463,379	43789389,038	1477891880,035
45	1	2025,000	91125,000	4100625,000	184528125,000	8303765625,000
56,25	1	3164,063	177978,516	10011291,504	563135147,095	31676352024,078
67,5	1	4556,250	307546,875	20759414,063	1401260449,219	94585080322,266
78,75	1	6201,563	488373,047	38459377,441	3028675973,511	238508232913,971
84,375	1	7119,141	600677,490	50682163,239	4276307523,251	360813447274,268
90	1	8100,000	729000,000	65610000,000	5904900000,000	531441000000,000
489,375	10	32937,891	2445958,740	191192641,754	15408543314,266	1266937543664,040
I	J	K	L	M	N	O
Хексп.=Хістн.	X0	X^2	X^3	X^4	X^5	X^6

Продовження розрахункової таблиці

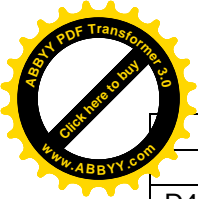
0	0	0	8,9231896	2,285E-02	0,000521958
99,8850462	1123,707	12641,70116	8,9086798	-3,001E-02	0,00090054
196,848708	4429,096	99654,65819	8,7488305	9,948E-07	9,89574E-13
284,435519	9599,699	323989,8332	8,5106908	-8,297E-02	0,006884302
378,766619	17044,5	767002,4032	8,2613099	1,557E-01	0,02425062
452,725976	25465,84	1432453,285	8,0677369	-1,928E-02	0,000371528
535,588913	36152,25	2440276,986	7,9970209	-6,237E-02	0,003890061
641,193561	50493,99	3976401,945	8,1162111	2,593E-02	0,000672329
693,539462	58517,39	4937404,961	8,2679739	-4,825E-02	0,00232777
767,765426	69098,89	6218899,954	8,4923567	3,837E-02	0,001472278
4050,749	271925,4	20208725,7	84,29	0,0000000	0,041291

P	Q	R	S	T	U
YX	YX^2	YX^3	Y'зрівн.	V=Yсптв.-Yз	VV

Додаток 4.

Розрахунок визначників

1266937543664,04	15408543314,27	191192642	2445959
15408543314,266	191192642	2445959	32937,891
191192641,754	2445959	32938	489
2445958,740	32938	489	10
D=	1,38204E+21		
20208725,7263	15408543314	191192642	2445959
271925,36058	191192642	2445959	32938
4050,7492311	2445959	32938	489
84,294000000	32938	489	10
D1=	1,08469E+16		
1266937543664	20208725,726	191192642	2445959
15408543314	271925,361	2445959	32938
191192642	4050,749	32938	489,375
2445959	84,2940	489,375	10
D2=	-1,1596E+18		
1266937543664	15408543314	20208726	2445958,7
15408543314	191192642	271925	32937,891
191192642	2445959	4051	489,375
2445959	32938	84,294	10
D3=	9,8904E+18		
1266937543664	15408543314	191192642	20208726
15408543314	191192642	2445959	271925
191192642	2445959	32938	4051



	2445959	32938	489,375	84,294
D4=		1,2332E+22		

Додаток 5.

Вільні члени нормальних рівнянь

20208725,73
271925,361
4050,749
84,294

Додаток 6.

Розрахунок коефіцієнтів апроксимуючого поліному

a=D1/D=	0,000007848
b=D2/D=	-0,000839
c=D3/D=	0,007156
d=D4/D=	8,923190
Y=aX^3+bX^2+cX+d	

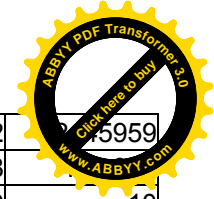
Нами виведена формула за результатами теоретичних досліджень:

$$\delta' = 0,000007848\delta^3 - 0,000839\delta^2 + 0,007156\delta + 8,923190.$$

Додаток 7.

Знаходження алгебраїчних доповнень

			1266937543664	15408543314	191192642
A44=	1,1858101,E+21		15408543314	191192642	2445959
			191192642	2445959	32938



			1266937543664	191192642	2445959
A22=	8,99382E+15		191192642	32938	
			2445959	489	10

A33=	1,24719,E+19		1266937543664	15408543314	2445959
			15408543314	191192642	32938
			2445959	32938	10

			191192642	2445959	32938
A11=	4,7761E+11		2445959	32938	489,375
			32937,891	489,375	10

Додаток 8.

Контроль зрівноваження

[yy]-	$\alpha[yx^3]$ -	$b[yx^2]$	- c[yx] -	d[y]	=	0,041291387
					[VV] =	0,041291387
					Різниця=	0,000000

Додаток 9.

Оцінка точності зрівноважених елементів

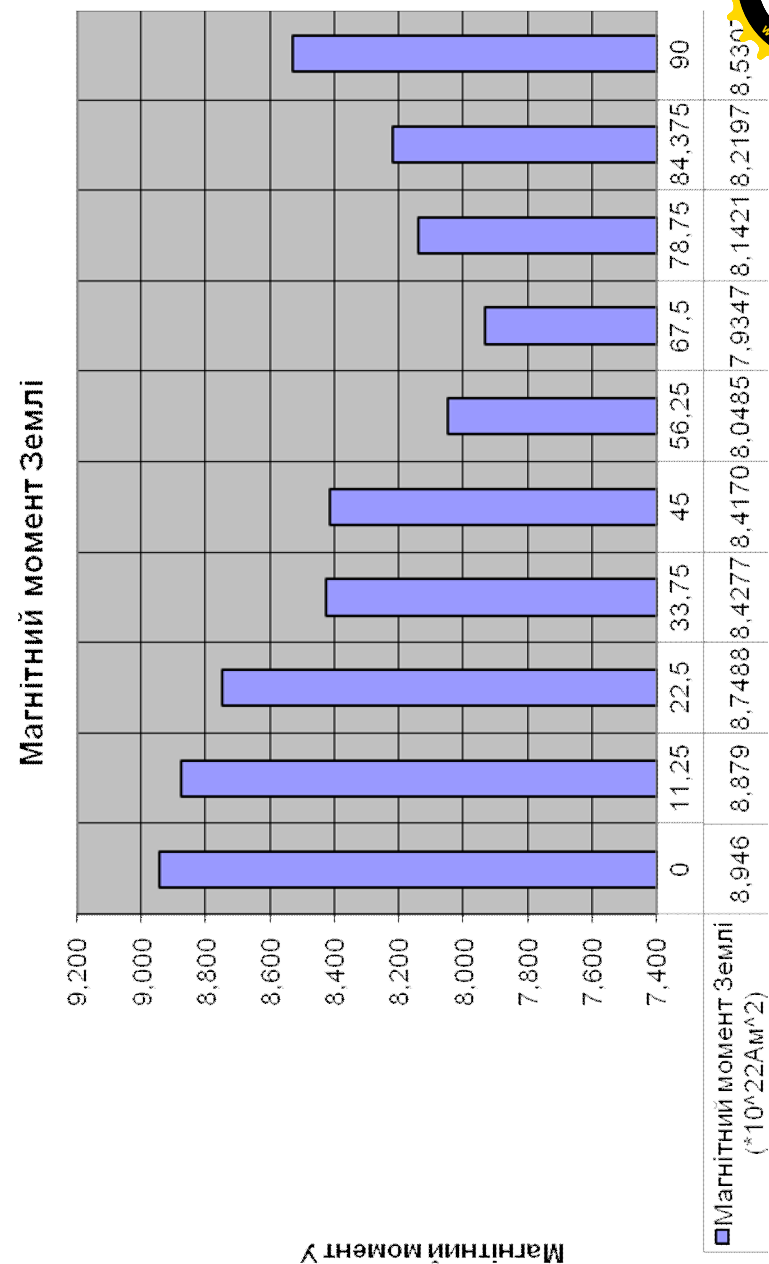
Середня квадратична похибка одиниці ваги	μ =	0,082957204
Середня квадратична похибка коефіцієнта a	ma=	1,54217E-06
Середня квадратична похибка коефіцієнта b	mb=	0,000211625
Середня квадратична похибка коефіцієнта c	mc=	0,007880641
Середня квадратична похибка коефіцієнта d	md=	0,076842591

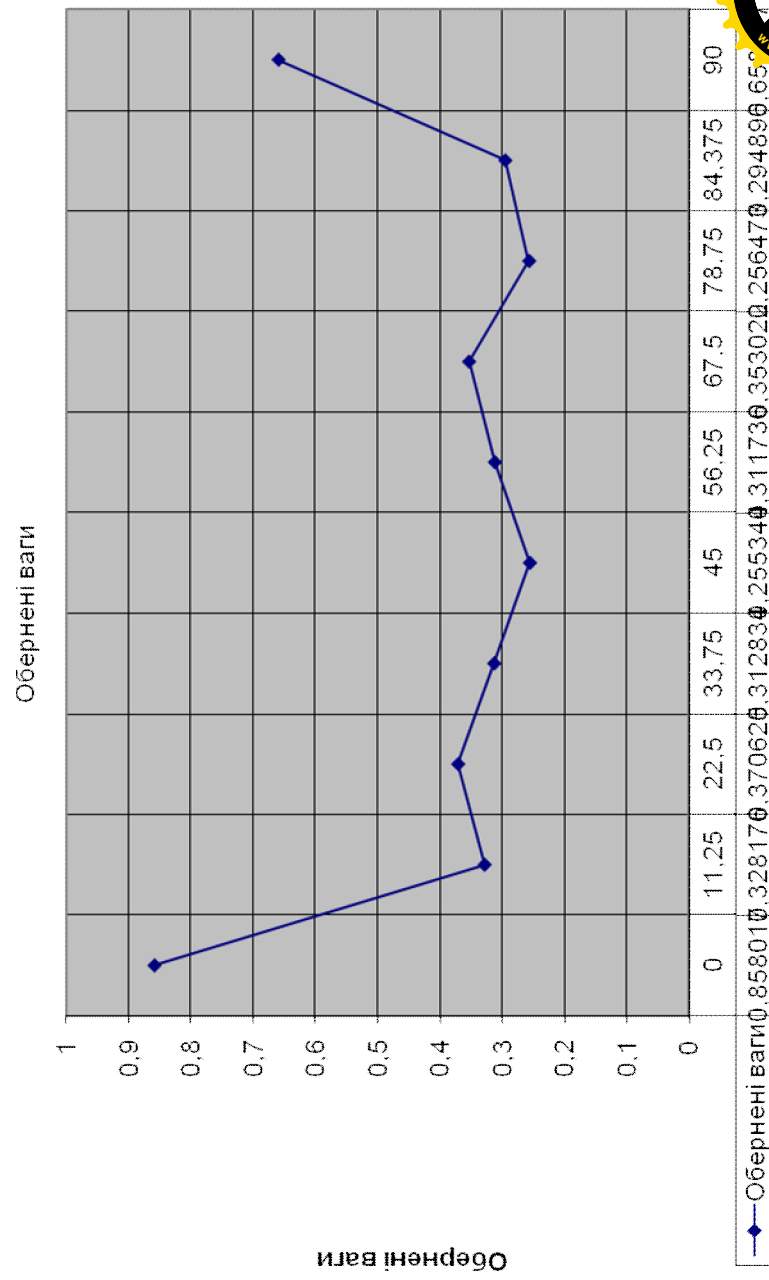
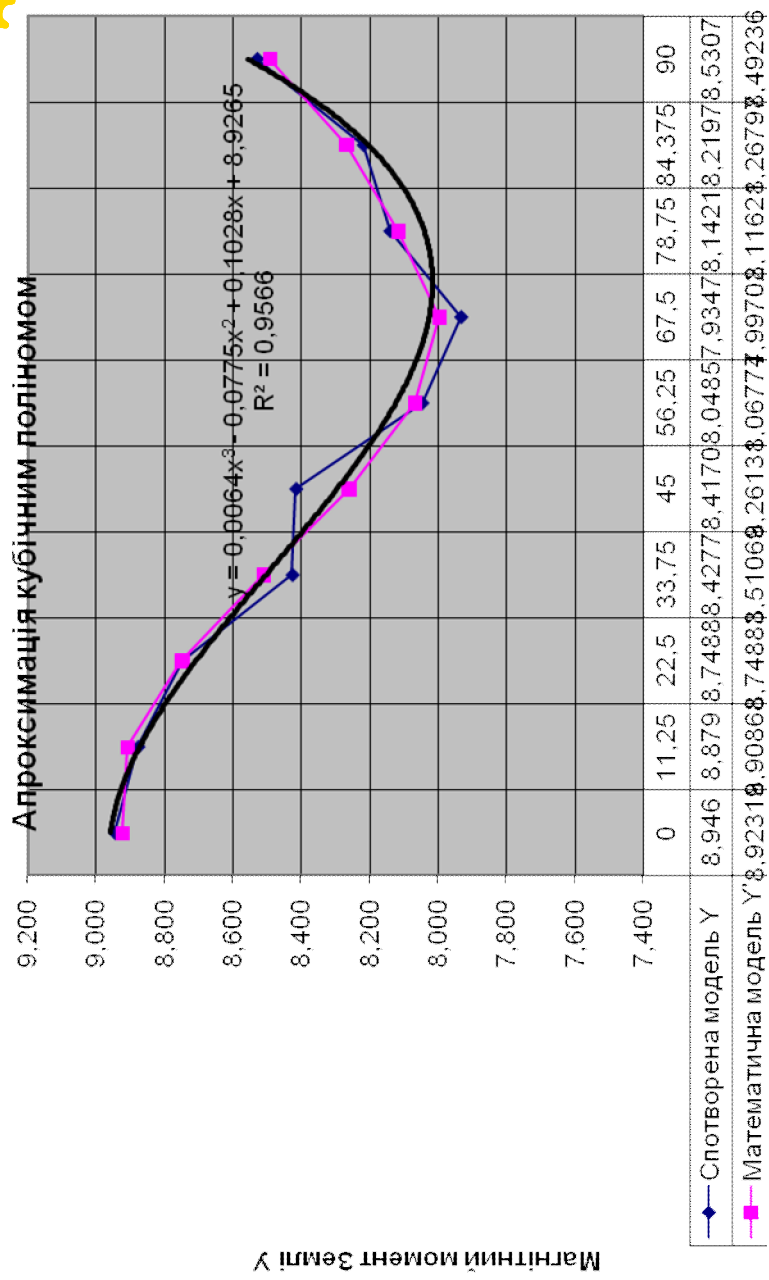
Середні квадратичні похибки зрівноваженої функції

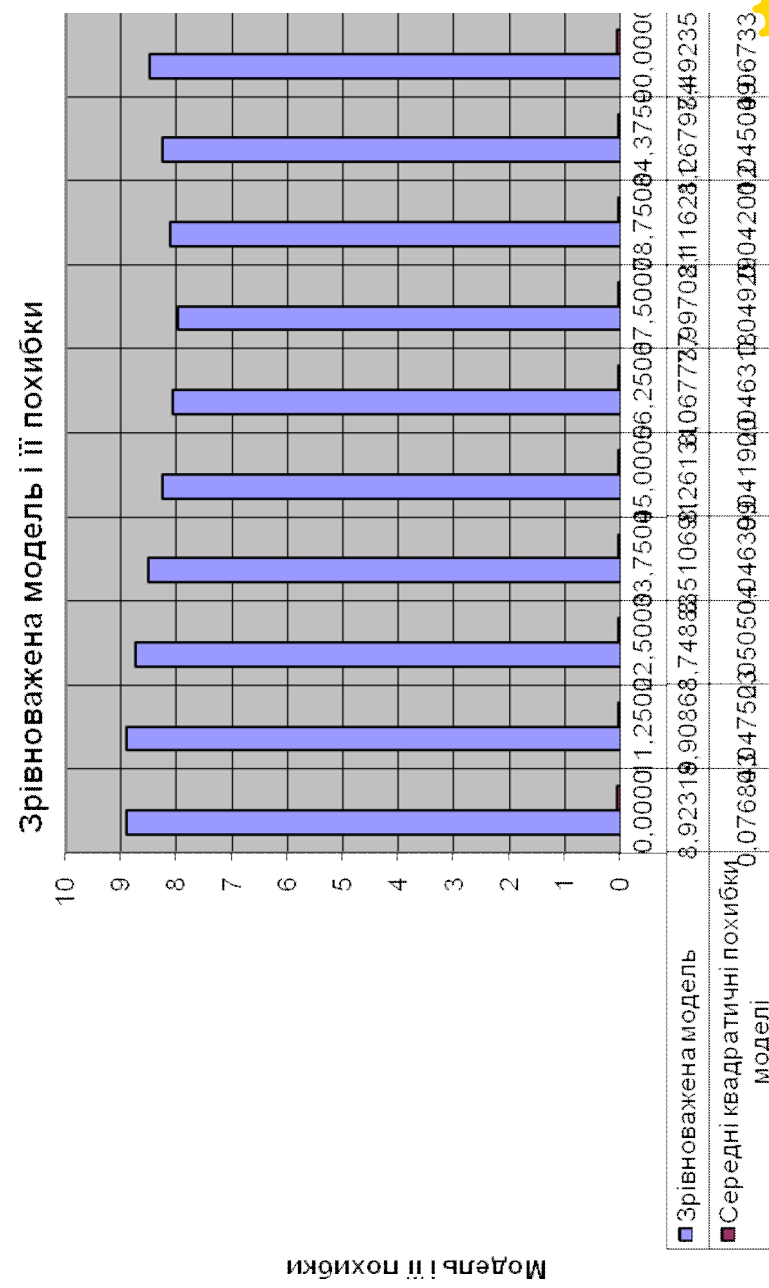
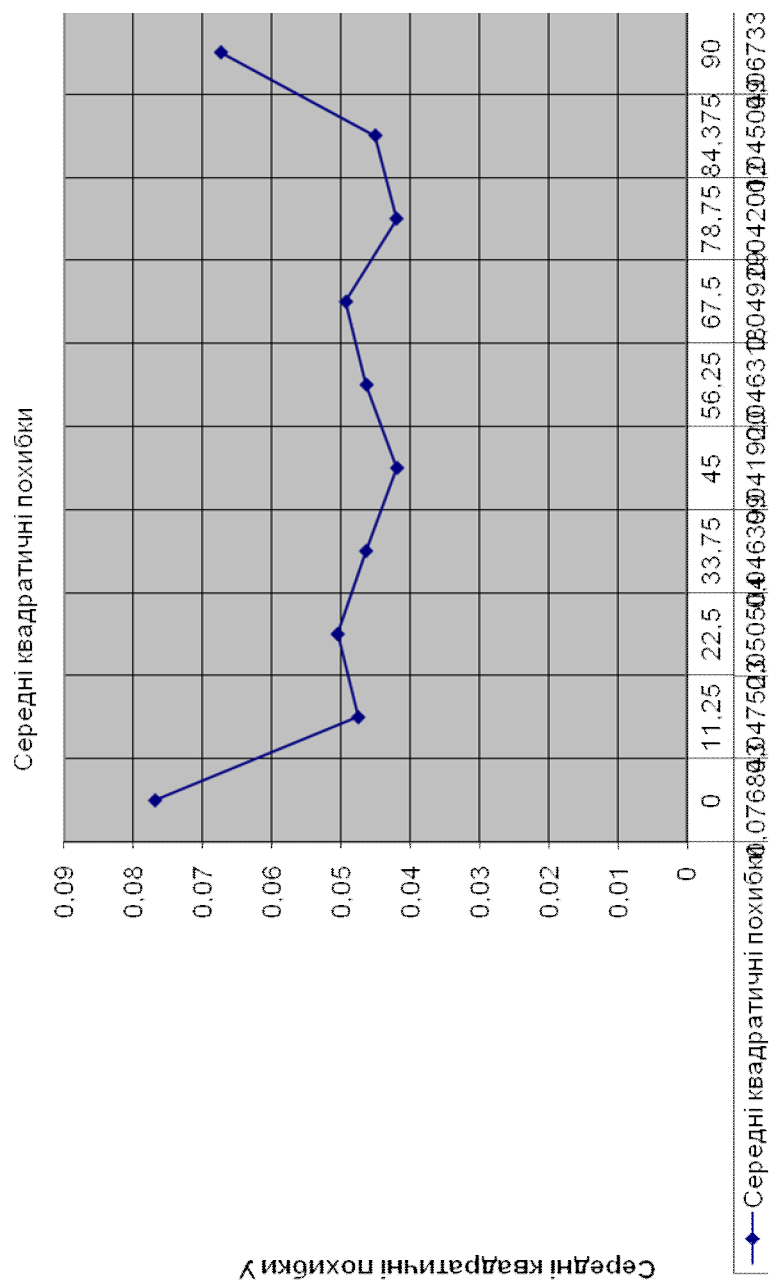
$m\varphi =$

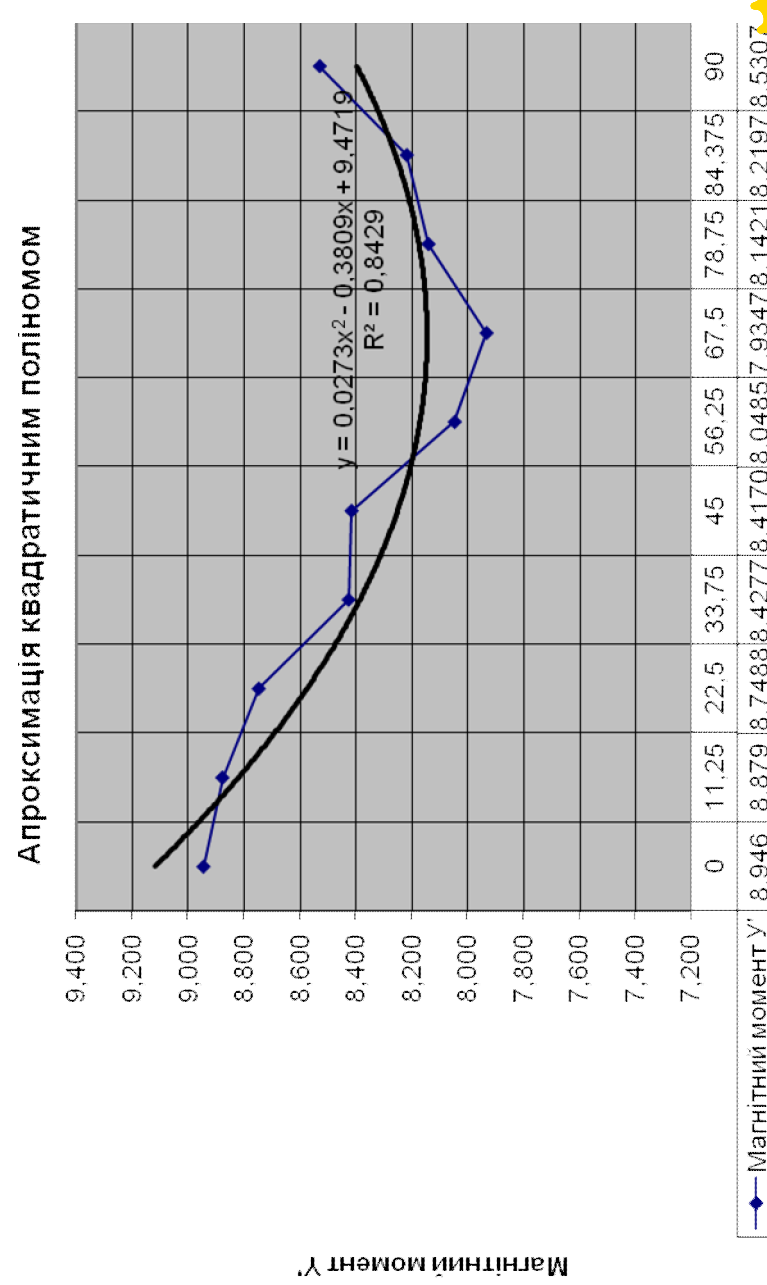
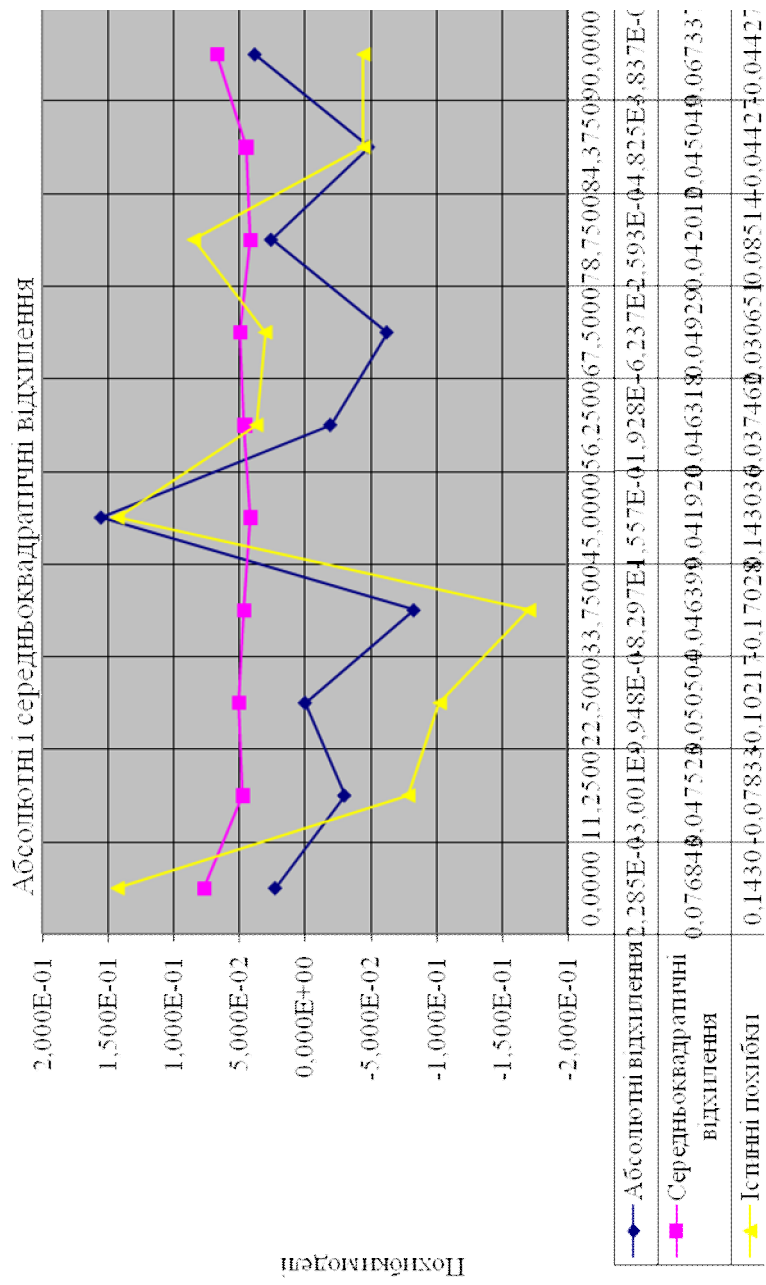
0,07684259
0,0475234
0,05050351
0,04639925
0,041920
0,04631778
0,04928956
0,04201214
0,04504937
0,06733738

Додаток 10. Діаграми досліджень

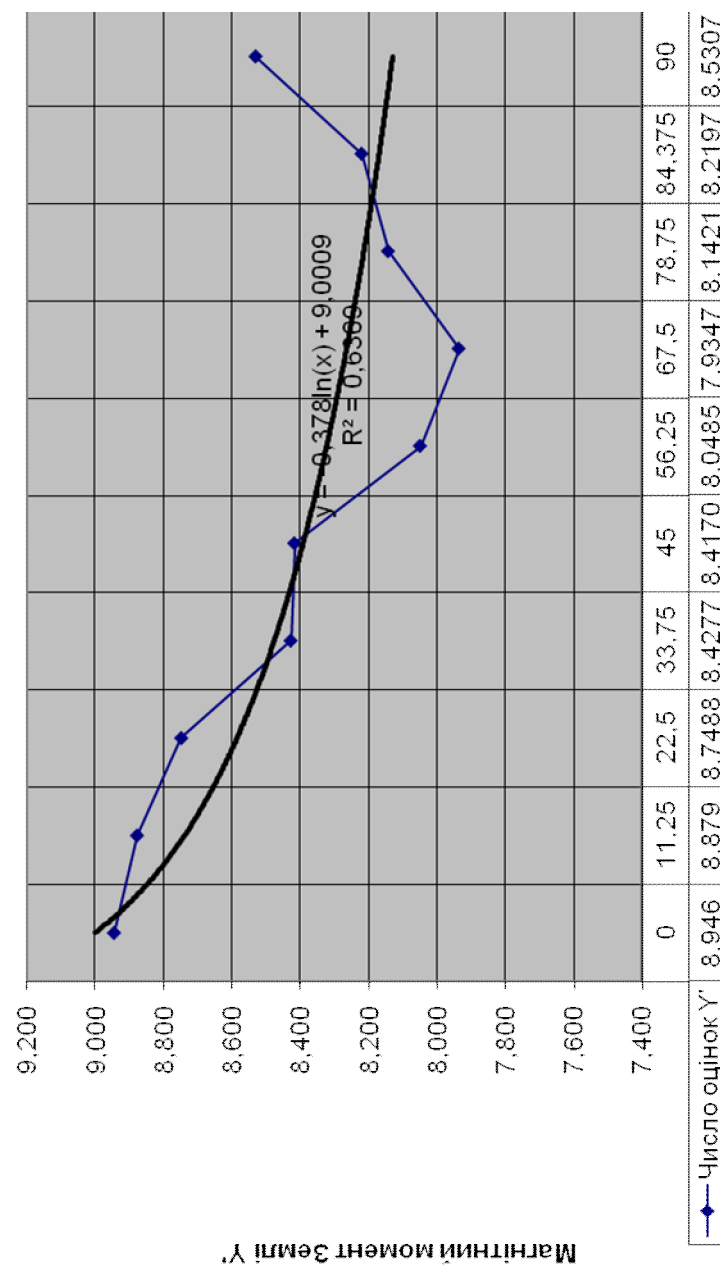




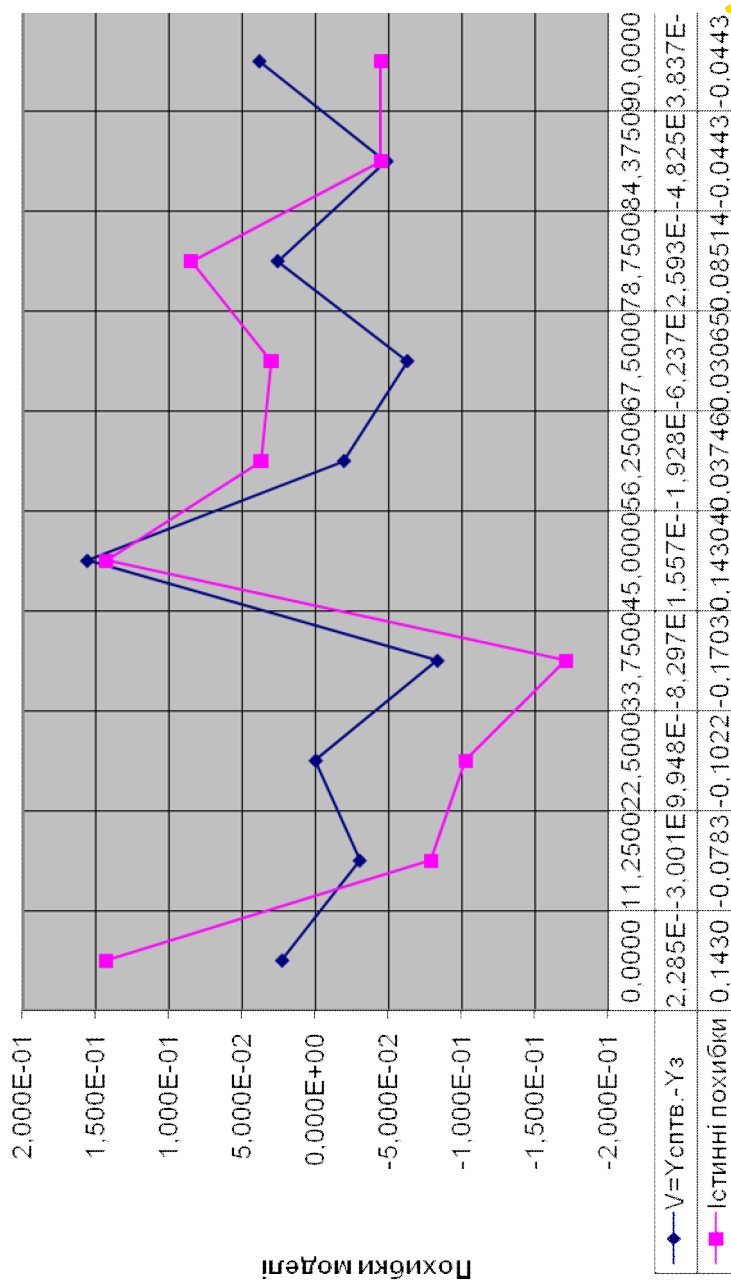


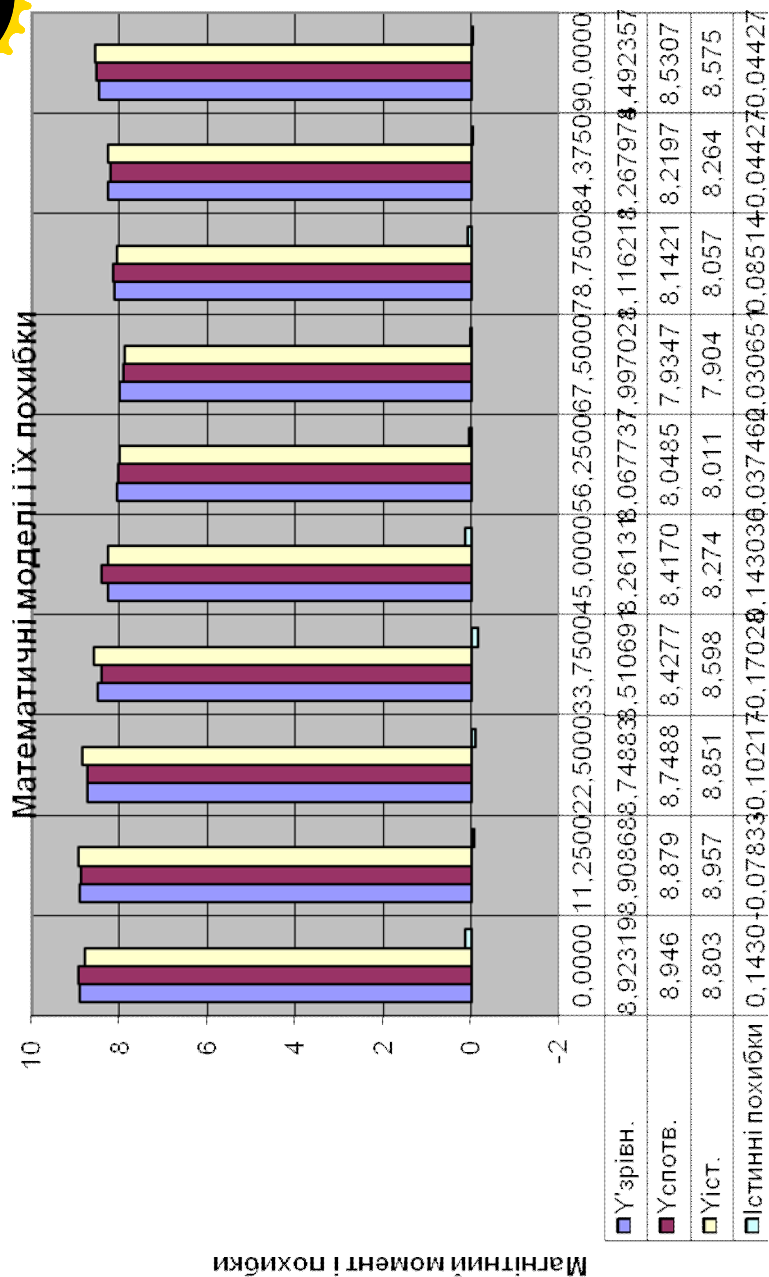


Апроксимация логарифмической функцией



Істинні і абсолютні похибки





Додаток 11. Таблиці Валецького О.О.

Variant No./ Random values

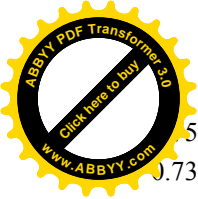
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
0.14	0.15	0.92	0.65	0.35	0.89	0.79	0.32	0.38	0.46	0.26	0.43	0.38	0.32	0.79	0.5
0.28	0.84	0.19	0.71	0.69	0.39	0.93	0.75	0.1	0.58	0.2	0.97	0.49	0.44	0.59	0.23
0.07	0.81	0.64	0.06	0.28	0.62	0.08	0.99	0.86	0.28	0.03	0.48	0.25	0.34	0.21	0.17
0.06	0.79	0.82	0.14	0.8	0.86	0.51	0.32	0.82	0.3	0.66	0.47	0.09	0.38	0.44	0.6
0.95	0.5	0.58	0.22	0.31	0.72	0.53	0.59	0.4	0.81	0.28	0.48	0.11	0.17	0.45	0.02
0.84	0.1	0.27	0.01	0.93	0.85	0.21	0.1	0.55	0.59	0.64	0.46	0.22	0.94	0.89	0.54
0.93	0.03	0.81	0.96	0.44	0.28	0.81	0.09	0.75	0.66	0.59	0.33	0.44	0.61	0.28	0.47
0.56	0.48	0.23	0.37	0.86	0.78	0.31	0.65	0.27	0.12	0.01	0.9	0.91	0.45	0.64	0.85
0.66	0.92	0.34	0.6	0.34	0.86	0.1	0.45	0.43	0.26	0.64	0.82	0.13	0.39	0.36	0.07
0.26	0.02	0.49	0.14	0.12	0.73	0.72	0.45	0.87	0	0.66	0.06	0.31	0.55	0.88	0.17

Variant No./ Random values

17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32
0.48	0.81	0.52	0.09	0.2	0.96	0.28	0.29	0.25	0.4	0.91	0.71	0.53	0.64	0.36	0.78
0.92	0.59	0.03	0.6	0.01	0.13	0.3	0.53	0.05	0.48	0.82	0.04	0.66	0.52	0.13	0.84
0.14	0.69	0.51	0.94	0.15	0.11	0.6	0.94	0.33	0.05	0.72	0.7	0.36	0.57	0.59	0.59
0.19	0.53	0.09	0.21	0.86	0.11	0.73	0.81	0.93	0.26	0.11	0.79	0.31	0.05	0.11	0.85
0.48	0.07	0.44	0.62	0.37	0.99	0.62	0.74	0.95	0.67	0.35	0.18	0.85	0.75	0.27	0.24
0.89	0.12	0.27	0.93	0.81	0.83	0.01	0.19	0.49	0.12	0.98	0.33	0.67	0.33	0.62	0.44
0.06	0.56	0.64	0.3	0.86	0.02	0.13	0.94	0.94	0.63	0.95	0.22	0.47	0.37	0.19	0.07
0.02	0.17	0.98	0.6	0.94	0.37	0.02	0.77	0.05	0.39	0.21	0.71	0.76	0.29	0.31	0.76
0.75	0.23	0.84	0.67	0.48	0.18	0.46	0.76	0.69	0.4	0.51	0.32	0	0.05	0.68	0.12
0.71	0.45	0.26	0.35	0.6	0.82	0.77	0.85	0.77	0.13	0.42	0.75	0.77	0.89	0.6	0.91

Variant No./ Random values

33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48
0.73	0.63	0.71	0.78	0.72	0.14	0.68	0.44	0.09	0.01	0.22	0.49	0.53	0.43	0.01	0.46
0.54	0.95	0.85	0.37	0.1	0.5	0.79	0.22	0.79	0.68	0.92	0.58	0.92	0.35	0.42	0.01
0.99	0.56	0.11	0.21	0.29	0.02	0.19	0.6	0.86	0.4	0.34	0.41	0.81	0.59	0.81	0.36
0.29	0.77	0.47	0.71	0.3	0.99	0.6	0.51	0.87	0.07	0.21	0.13	0.49	0.99	0.99	0.98
0.37	0.29	0.78	0.04	0.99	0.51	0.05	0.97	0.31	0.73	0.28	0.16	0.09	0.63	0.18	0.59
0.5	0.24	0.45	0.94	0.55	0.34	0.69	0.08	0.3	0.26	0.42	0.52	0.23	0.08	0.25	0.33
0.44	0.68	0.5	0.35	0.26	0.19	0.31	0.18	0.81	0.71	0.01	0	0.03	0.13	0.78	0.38



5 0.28 0.86 0.58 0.75 0.33 0.2 0.83 0.81 0.42 0.06 0.17 0.17 0.76 0.69 0.14
0.73 0.03 0.59 0.82 0.53 0.49 0.04 0.28 0.75 0.54 0.68 0.73 0.11 0.59 0.56 0.28
0.63 0.88 0.23 0.53 0.78 0.75 0.93 0.75 0.19 0.57 0.78 0.18 0.57 0.78 0.05 0.32

Variant No./ Random values

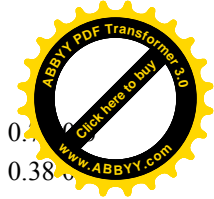
49 50 51 52 53 54 55 56 57 58 59 60 61 62 63 64
0.17 0.12 0.26 0.8 0.66 0.13 0 0.19 0.27 0.87 0.66 0.11 0.19 0.59 0.09 0.21
0.64 0.2 0.19 0.89 0.38 0.09 0.52 0.57 0.2 0.1 0.65 0.48 0.58 0.63 0.27 0.88
0.65 0.93 0.61 0.53 0.38 0.18 0.27 0.96 0.82 0.3 0.3 0.19 0.52 0.03 0.53 0.01
0.85 0.29 0.68 0.99 0.57 0.73 0.62 0.25 0.99 0.41 0.38 0.91 0.24 0.97 0.21 0.77
0.52 0.83 0.47 0.91 0.31 0.51 0.55 0.74 0.85 0.72 0.42 0.45 0.41 0.5 0.69 0.59
0.5 0.82 0.95 0.33 0.11 0.68 0.61 0.72 0.78 0.55 0.88 0.9 0.75 0.09 0.83 0.81
0.75 0.46 0.37 0.46 0.49 0.39 0.31 0.92 0.55 0.06 0.04 0 0.92 0.77 0.01 0.67
0.11 0.39 0 0.98 0.48 0.82 0.4 0.12 0.85 0.83 0.61 0.6 0.35 0.63 0.7 0.76
0.6 0.1 0.47 0.1 0.18 0.19 0.42 0.95 0.55 0.96 0.19 0.89 0.46 0.76 0.78 0.37
0.44 0.94 0.48 0.25 0.53 0.79 0.77 0.47 0.26 0.84 0.71 0.04 0.04 0.75 0.34 0.64

Variant No./ Random values

65 66 67 68 69 70 71 72 73 74 75 76 77 78 79 80
0.62 0.08 0.04 0.66 0.84 0.25 0.9 0.69 0.49 0.12 0.93 0.31 0.36 0.77 0.02 0.89
0.89 0.15 0.21 0.04 0.75 0.21 0.62 0.05 0.69 0.66 0.02 0.4 0.58 0.03 0.81 0.5
0.19 0.35 0.11 0.25 0.33 0.82 0.43 0 0.35 0.58 0.76 0.4 0.24 0.74 0.96 0.47
0.32 0.63 0.91 0.41 0.99 0.27 0.26 0.04 0.26 0.99 0.22 0.79 0.67 0.82 0.35 0.47
0.81 0.63 0.6 0.09 0.34 0.17 0.21 0.64 0.12 0.19 0.92 0.45 0.86 0.31 0.5 0.3
0.28 0.61 0.82 0.97 0.45 0.55 0.7 0.67 0.49 0.83 0.85 0.05 0.49 0.45 0.88 0.58
0.69 0.26 0.99 0.56 0.9 0.92 0.72 0.1 0.79 0.75 0.09 0.3 0.29 0.55 0.32 0.11
0.65 0.34 0.49 0.87 0.2 0.27 0.55 0.96 0.02 0.36 0.48 0.06 0.65 0.49 0.91 0.19
0.88 0.18 0.34 0.79 0.77 0.53 0.56 0.63 0.69 0.8 0.74 0.26 0.54 0.25 0.27 0.86
0.25 0.51 0.81 0.84 0.17 0.57 0.46 0.72 0.89 0.09 0.77 0.77 0.27 0.93 0.8 0

Variant No./ Random values

81 82 83 84 85 86 87 88 89 90 91 92 93 94 95 96
0.81 0.64 0.7 0.6 0.01 0.61 0.45 0.24 0.91 0.92 0.17 0.32 0.17 0.21 0.47 0.72
0.35 0.01 0.41 0.44 0.19 0.73 0.56 0.85 0.48 0.16 0.13 0.61 0.15 0.73 0.52 0.55
0.21 0.33 0.47 0.57 0.41 0.84 0.94 0.68 0.43 0.85 0.23 0.32 0.39 0.07 0.39 0.41
0.43 0.33 0.45 0.47 0.76 0.24 0.16 0.86 0.25 0.18 0.98 0.35 0.69 0.48 0.55 0.62
0.09 0.92 0.19 0.22 0.21 0.84 0.27 0.25 0.5 0.25 0.42 0.56 0.88 0.76 0.71 0.79



0.04 0.94 0.6 0.16 0.53 0.46 0.68 0.04 0.98 0.86 0.27 0.23 0.27 0.91 0
0.85 0.78 0.43 0.83 0.82 0.79 0.67 0.97 0.66 0.81 0.45 0.41 0 0.95 0.38
0.78 0.63 0.6 0.95 0.06 0.8 0.06 0.42 0.25 0.12 0.52 0.05 0.11 0.73 0.92 0.98
0.48 0.96 0.08 0.41 0.28 0.48 0.86 0.26 0.94 0.56 0.04 0.24 0.19 0.65 0.28 0.5
0.22 0.21 0.06 0.61 0.18 0.63 0.06 0.74 0.42 0.78 0.62 0.2 0.39 0.19 0.49 0.45

Variant No./ Random values

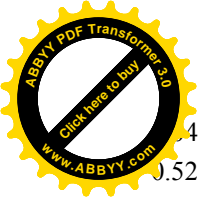
97 98 99 100 101 102 103 104 105 106 107 108 109 110 111 112
0.04 0.71 0.23 0.71 0.37 0.86 0.96 0.09 0.56 0.36 0.43 0.71 0.91 0.72 0.87 0.46
0.77 0.64 0.65 0.75 0.73 0.96 0.24 0.13 0.89 0.08 0.65 0.83 0.26 0.45 0.99 0.58
0.13 0.39 0.04 0.78 0.02 0.75 0.9 0.09 0.94 0.65 0.76 0.4 0.78 0.95 0.12 0.69
0.46 0.83 0.98 0.35 0.25 0.95 0.7 0.98 0.25 0.82 0.26 0.2 0.52 0.24 0.89 0.4
0.77 0.26 0.71 0.94 0.78 0.26 0.84 0.82 0.6 0.14 0.76 0.99 0.09 0.02 0.64 0.01
0.36 0.39 0.44 0.37 0.45 0.53 0.05 0.06 0.82 0.03 0.49 0.62 0.52 0.45 0.17 0.49
0.39 0.96 0.51 0.43 0.14 0.29 0.8 0.91 0.9 0.65 0.92 0.5 0.93 0.72 0.21 0.69
0.64 0.61 0.51 0.57 0.09 0.85 0.83 0.87 0.41 0.05 0.97 0.88 0.59 0.59 0.77 0.29
0.75 0.49 0.89 0.3 0.16 0.17 0.53 0.92 0.84 0.68 0.13 0.82 0.68 0.68 0.38 0.68
0.94 0.27 0.74 0.15 0.59 0.91 0.85 0.59 0.25 0.24 0.59 0.53 0.95 0.94 0.31 0.04

Variant No./ Random values

113 114 115 116 117 118 119 120 121 122 123 124 125 126 127 128
0.99 0.72 0.52 0.46 0.8 0.84 0.59 0.87 0.27 0.36 0.44 0.69 0.58 0.48 0.65 0.38
0.36 0.73 0.62 0.22 0.62 0.6 0.99 0.12 0.46 0.08 0.05 0.12 0.43 0.88 0.43 0.9
0.45 0.12 0.44 0.13 0.65 0.49 0.76 0.27 0.8 0.79 0.77 0.15 0.69 0.14 0.35 0.99
0.77 0 0.12 0.96 0.16 0.08 0.94 0.41 0.69 0.48 0.68 0.55 0.58 0.48 0.4 0.63
0.53 0.42 0.2 0.72 0.22 0.58 0.28 0.48 0.86 0.48 0.15 0.84 0.56 0.02 0.85 0.06
0.01 0.68 0.42 0.73 0.94 0.52 0.26 0.74 0.67 0.67 0.88 0.95 0.25 0.21 0.38 0.52
0.25 0.49 0.95 0.46 0.66 0.72 0.78 0.23 0.98 0.64 0.56 0.59 0.61 0.16 0.35 0.48
0.86 0.23 0.05 0.77 0.45 0.64 0.98 0.03 0.55 0.93 0.63 0.45 0.68 0.17 0.43 0.24
0.11 0.25 0.15 0.07 0.6 0.69 0.47 0.94 0.51 0.09 0.65 0.96 0.09 0.4 0.25 0.22
0.88 0.79 0.71 0.08 0.93 0.14 0.56 0.69 0.13 0.68 0.67 0.22 0.87 0.48 0.94 0.05

Variant No./ Random values

129 130 131 132 133 134 135 136 137 138 139 140 141 142 143 144
0.6 0.1 0.15 0.03 0.3 0.86 0.17 0.92 0.86 0.8 0.92 0.08 0.74 0.76 0.09 0.17
0.82 0.49 0.38 0.58 0.9 0.09 0.71 0.49 0.09 0.67 0.59 0.85 0.26 0.13 0.65 0.54
0.97 0.81 0.89 0.31 0.29 0.78 0.48 0.21 0.68 0.29 0.98 0.94 0.87 0.22 0.65 0.88



0.4 0.85 0.75 0.64 0.01 0.42 0.7 0.47 0.75 0.55 0.13 0.23 0.79 0.64 0.14 0.51
0.52 0.37 0.46 0.23 0.43 0.64 0.54 0.28 0.58 0.44 0.47 0.95 0.26 0.58 0.67 0.82
0.1 0.51 0.14 0.13 0.54 0.73 0.57 0.39 0.52 0.31 0.13 0.42 0.71 0.66 0.1 0.21
0.35 0.96 0.95 0.36 0.23 0.14 0.42 0.95 0.24 0.84 0.93 0.71 0.87 0.11 0.01 0.45
0.76 0.54 0.03 0.59 0.02 0.79 0.93 0.44 0.03 0.74 0.2 0.07 0.31 0.05 0.78 0.53
0.9 0.62 0.19 0.83 0.87 0.44 0.78 0.08 0.47 0.84 0.89 0.68 0.33 0.21 0.44 0.57
0.13 0.86 0.87 0.51 0.94 0.35 0.06 0.43 0.02 0.18 0.45 0.31 0.91 0.04 0.84 0.81

Variant No./ Random values

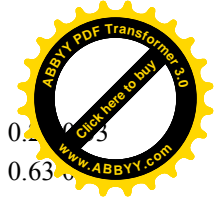
145 146 147 148 149 150 151 152 153 154 155 156 157 158 159 160
0 0.53 0.7 0.61 0.46 0.8 0.67 0.49 0.19 0.27 0.81 0.91 0.19 0.79 0.39 0.95
0.2 0.61 0.41 0.96 0.63 0.42 0.87 0.54 0.44 0.06 0.43 0.74 0.51 0.23 0.71 0.81
0.92 0.17 0.99 0.98 0.39 0.1 0.15 0.91 0.95 0.61 0.81 0.46 0.75 0.14 0.26 0.91
0.23 0.97 0.48 0.94 0.09 0.07 0.18 0.64 0.94 0.23 0.19 0.61 0.56 0.79 0.45 0.2
0.8 0.95 0.14 0.65 0.5 0.22 0.52 0.31 0.6 0.38 0.81 0.93 0.01 0.42 0.09 0.37
0.62 0.13 0.78 0.55 0.95 0.66 0.38 0.93 0.77 0.87 0.08 0.3 0.39 0.06 0.97 0.92
0.07 0.73 0.46 0.72 0.21 0.82 0.56 0.25 0.99 0.66 0.15 0.01 0.42 0.15 0.03 0.06
0.8 0.38 0.44 0.77 0.34 0.54 0.92 0.02 0.6 0.54 0.14 0.66 0.59 0.25 0.2 0.14
0.97 0.44 0.28 0.5 0.73 0.25 0.18 0.66 0.6 0.02 0.13 0.24 0.34 0.08 0.81 0.9
0.71 0.04 0.86 0.33 0.17 0.34 0.64 0.96 0.51 0.45 0.39 0.05 0.79 0.62 0.68 0.56

Variant No./ Random values

161 162 163 164 165 166 167 168 169 170 171 172 173 174 175 176
0.1 0.05 0.5 0.81 0.06 0.65 0.87 0.96 0.99 0.81 0.63 0.57 0.47 0.36 0.38 0.4
0.52 0.57 0.14 0.59 0.1 0.28 0.97 0.06 0.41 0.4 0.11 0.09 0.71 0.2 0.62 0.8
0.43 0.9 0.39 0.75 0.95 0.15 0.67 0.71 0.57 0.7 0.04 0.2 0.33 0.78 0.69 0.93
0.6 0.07 0.23 0.05 0.58 0.76 0.31 0.76 0.35 0.94 0.21 0.87 0.31 0.25 0.14 0.71
0.2 0.53 0.29 0.28 0.19 0.18 0.26 0.18 0.61 0.25 0.86 0.73 0.21 0.57 0.91 0.98
0.41 0.48 0.48 0.82 0.91 0.64 0.47 0.06 0.09 0.57 0.52 0.7 0.69 0.57 0.22 0.09
0.17 0.56 0.71 0.16 0.72 0.29 0.1 0.98 0.16 0.9 0.91 0.52 0.8 0.17 0.35 0.06
0.71 0.27 0.48 0.58 0.32 0.22 0.87 0.18 0.35 0.2 0.93 0.53 0.96 0.57 0.25 0.12
0.1 0.83 0.57 0.91 0.51 0.36 0.98 0.82 0.09 0.14 0.44 0.21 0 0.67 0.51 0.03
0.34 0.67 0.11 0.03 0.14 0.12 0.67 0.11 0.13 0.69 0.9 0.86 0.58 0.51 0.63 0.98

Variant No./ Random values

177 178 179 180 181 182 183 184 185 186 187 188 189 190 191 192
0.31 0.5 0.19 0.7 0.16 0.51 0.51 0.16 0.85 0.17 0.14 0.37 0.65 0.76 0.18 0.35



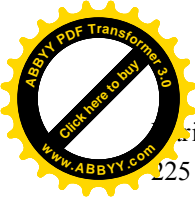
0.15 0.56 0.5 0.88 0.49 0.09 0.98 0.98 0.59 0.98 0.23 0.87 0.34 0.55 0.2
0.16 0.35 0.5 0.76 0.47 0.91 0.85 0.35 0.89 0.32 0.26 0.18 0.54 0.89 0.63
0.32 0.93 0.3 0.89 0.85 0.7 0.64 0.2 0.46 0.75 0.25 0.9 0.7 0.91 0.54 0.81
0.41 0.65 0.49 0.85 0.94 0.61 0.63 0.71 0.8 0.27 0.09 0.81 0.99 0.43 0.09 0.92
0.44 0.88 0.95 0.75 0.71 0.28 0.28 0.9 0.59 0.23 0.23 0.32 0.6 0.97 0.29 0.97
0.12 0.08 0.44 0.33 0.57 0.32 0.65 0.48 0.93 0.82 0.39 0.11 0.93 0.25 0.97 0.46
0.36 0.67 0.3 0.58 0.36 0.04 0.14 0.28 0.13 0.88 0.3 0.32 0.03 0.82 0.49 0.03
0.75 0.89 0.85 0.24 0.37 0.44 0.17 0.02 0.91 0.32 0.76 0.56 0.18 0.09 0.37 0.73
0.44 0.4 0.3 0.7 0.74 0.69 0.21 0.12 0.01 0.91 0.3 0.2 0.33 0.03 0.8 0.19

Variant No./ Random values

193 194 195 196 197 198 199 200 201 202 203 204 205 206 207 208
0.76 0.21 0.1 0.11 0 0.44 0.92 0.93 0.21 0.51 0.6 0.84 0.24 0.44 0.85 0.96
0.37 0.66 0.98 0.38 0.95 0.22 0.86 0.84 0.78 0.31 0.23 0.55 0.26 0.58 0.21 0.31
0.44 0.95 0.76 0.85 0.72 0.62 0.43 0.34 0.41 0.89 0.3 0.39 0.68 0.64 0.26 0.24
0.34 0.1 0.77 0.32 0.26 0.97 0.8 0.28 0.07 0.31 0.89 0.15 0.44 0.11 0.01 0.04
0.46 0.82 0.32 0.52 0.71 0.62 0.01 0.05 0.26 0.52 0.27 0.21 0.11 0.66 0.03 0.96
0.66 0.55 0.73 0.09 0.25 0.47 0.11 0.05 0.57 0.85 0.37 0.63 0.46 0.68 0.2 0.65
0.31 0.09 0.89 0.65 0.26 0.91 0.86 0.2 0.56 0.47 0.69 0.31 0.25 0.7 0.58 0.63
0.56 0.62 0.01 0.85 0.58 0.1 0.07 0.29 0.36 0.06 0.59 0.87 0.64 0.86 0.11 0.79
0.1 0.45 0.33 0.48 0.85 0.03 0.46 0.11 0.36 0.57 0.68 0.67 0.53 0.24 0.94 0.41
0.66 0.8 0.39 0.62 0.65 0.79 0.78 0.77 0.18 0.55 0.6 0.84 0.55 0.29 0.65 0.41

Variant No./ Random values

209 210 211 212 213 214 215 216 217 218 219 220 221 222 223 224
0.26 0.65 0.4 0.85 0.3 0.61 0.43 0.44 0.43 0.18 0.58 0.67 0.69 0.75 0.14 0.56
0.61 0.4 0.68 0 0.7 0.02 0.37 0.87 0.76 0.59 0.13 0.44 0.01 0.71 0.27 0.49
0.47 0.04 0.2 0.56 0.22 0.3 0.53 0.89 0.94 0.56 0.13 0.14 0.07 0.11 0.27 0
0.04 0.07 0.85 0.47 0.33 0.26 0.99 0.39 0.08 0.14 0.54 0.66 0.46 0.45 0.88 0.07
0.97 0.27 0.08 0.26 0.68 0.3 0.63 0.43 0.28 0.58 0.78 0.56 0.98 0.3 0.52 0.35
0.8 0.89 0.33 0.06 0.57 0.57 0.4 0.67 0.95 0.45 0.71 0.63 0.77 0.52 0.54 0.2
0.21 0.14 0.95 0.57 0.61 0.58 0.14 0 0.25 0.01 0.26 0.22 0.85 0.94 0.13 0.02
0.16 0.47 0.15 0.5 0.97 0.92 0.59 0.23 0.09 0.9 0.79 0.65 0.47 0.37 0.61 0.25
0.51 0.76 0.56 0.75 0.13 0.57 0.51 0.78 0.29 0.66 0.64 0.54 0.77 0.91 0.74 0.5
0.11 0.29 0.96 0.14 0.89 0.03 0.04 0.63 0.99 0.47 0.13 0.29 0.62 0.1 0.73 0.4



Variant No./ Random values

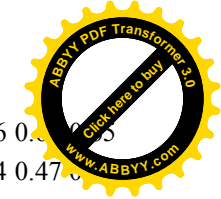
225 226 227 228 229 230 231 232 233 234 235 236 237 238 239 240
0.43 0.75 0.18 0.95 0.73 0.59 0.61 0.45 0.89 0.01 0.93 0.89 0.71 0.31 0.11 0.79
0.04 0.29 0.78 0.28 0.56 0.47 0.5 0.32 0.03 0.19 0.86 0.91 0.51 0.4 0.28 0.7
0.8 0.85 0.99 0.04 0.8 0.1 0.94 0.12 0.14 0.72 0.21 0.31 0.79 0.47 0.64 0.77
0.72 0.62 0.24 0.14 0.25 0.48 0.54 0.54 0.03 0.32 0.15 0.71 0.85 0.3 0.61 0.42
0.28 0.81 0.37 0.58 0.5 0.43 0.06 0.33 0.21 0.75 0.18 0.29 0.79 0.86 0.62 0.23
0.71 0.72 0.15 0.91 0.6 0.77 0.16 0.69 0.25 0.47 0.48 0.73 0.89 0.86 0.65 0.49
0.49 0.45 0.01 0.14 0.65 0.4 0.62 0.84 0.33 0.66 0.39 0.37 0.9 0.03 0.97 0.69
0.26 0.56 0.72 0.14 0.63 0.85 0.3 0.67 0.36 0.09 0.65 0.71 0.2 0.91 0.8 0.76
0.38 0.32 0.71 0.66 0.41 0.62 0.74 0.88 0.88 0 0.78 0.69 0.25 0.6 0.29 0.02
0.28 0.47 0.21 0.04 0.03 0.17 0.21 0.18 0.6 0.82 0.04 0.19 0 0.04 0.22 0.96

Variant No./ Random values

241 242 243 244 245 246 247 248 249 250 251 252 253 254 255 256
0.61 0.71 0.19 0.63 0.77 0.92 0.13 0.37 0.57 0.51 0.14 0.95 0.95 0.01 0.56 0.6
0.49 0.63 0.18 0.62 0.94 0.72 0.65 0.47 0.36 0.42 0.52 0.3 0.81 0.77 0.03 0.67
0.51 0.59 0.06 0.73 0.5 0.23 0.5 0.72 0.83 0.54 0.05 0.67 0.04 0.03 0.86 0.74
0.35 0.13 0.62 0.22 0.24 0.77 0.15 0.89 0.15 0.04 0.95 0.3 0.98 0.44 0.48 0.93
0.33 0.09 0.63 0.4 0.87 0.8 0.76 0.93 0.25 0.99 0.39 0.78 0.05 0.41 0.93 0.41
0.44 0.73 0.77 0.44 0.18 0.42 0.63 0.12 0.98 0.6 0.8 0.99 0.88 0.86 0.87 0.41
0.32 0.6 0.47 0.21 0.56 0.95 0.16 0.23 0.96 0.58 0.64 0.57 0.3 0.21 0.63 0.15
0.98 0.19 0.31 0.95 0.16 0.73 0.53 0.81 0.29 0.74 0.16 0.77 0.29 0.47 0.86 0.72
0.42 0.29 0.24 0.65 0.43 0.66 0.8 0.09 0.8 0.67 0.69 0.28 0.23 0.82 0.8 0.68
0.99 0.64 0 0.48 0.24 0.35 0.4 0.37 0.01 0.41 0.63 0.14 0.96 0.58 0.97 0.94

Variant No./ Random values

257 258 259 260 261 262 263 264 265 266 267 268 269 270 271 272
0.09 0.24 0.32 0.37 0.89 0.69 0.07 0.06 0.97 0.79 0.42 0.23 0.62 0.5 0.82 0.21
0.68 0.89 0.57 0.38 0.37 0.98 0.62 0.3 0.01 0.59 0.37 0.76 0.47 0.16 0.51 0.22
0.89 0.35 0.78 0.6 0.15 0.88 0.16 0.17 0.55 0.78 0.29 0.73 0.52 0.33 0.44 0.6
0.42 0.81 0.51 0.26 0.27 0.2 0.37 0.34 0.31 0.46 0.53 0.19 0.77 0.77 0.41 0.6
0.31 0.99 0.06 0.65 0.54 0.18 0.76 0.39 0.79 0.29 0.33 0.44 0.19 0.52 0.15 0.41
0.34 0.18 0.99 0.48 0.54 0.44 0.73 0.45 0.67 0.38 0.31 0.62 0.49 0.93 0.41 0.91
0.31 0.81 0.48 0.09 0.27 0.77 0.71 0.03 0.86 0.38 0.77 0.34 0.31 0.77 0.2 0.75
0.45 0.65 0.45 0.32 0.2 0.77 0.7 0.92 0.12 0.01 0.9 0.51 0.66 0.09 0.62 0.8



0.49 0.09 0.26 0.36 0.01 0.97 0.59 0.88 0.28 0.16 0.13 0.32 0.31 0.66 0.0
0.28 0.61 0.93 0.26 0.68 0.63 0.36 0.06 0.27 0.35 0.67 0.63 0.03 0.54 0.47

Variant No./ Random values

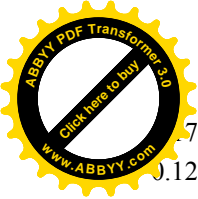
273 274 275 276 277 278 279 280 281 282 283 284 285 286 287 288
0.28 0.03 0.5 0.45 0.07 0.77 0.23 0.55 0.47 0.1 0.58 0.59 0.54 0.87 0.02 0.79
0.08 0.14 0.35 0.62 0.4 0.14 0.51 0.71 0.8 0.62 0.46 0.43 0.62 0.67 0.94 0.56
0.12 0.75 0.31 0.81 0.34 0.07 0.83 0.3 0.33 0.62 0.54 0.23 0.27 0.83 0.94 0.49
0.75 0.38 0.24 0.37 0.2 0.58 0.35 0.31 0.14 0.77 0.11 0.99 0.26 0.06 0.38 0.13
0.34 0.67 0.76 0.87 0.96 0.95 0.97 0.03 0.09 0.83 0.39 0.13 0.07 0.71 0.09 0.87
0.04 0.08 0.59 0.13 0.37 0.46 0.41 0.44 0.28 0.22 0.77 0.26 0.34 0.65 0.94 0.7
0.47 0.45 0.87 0.84 0.77 0.87 0.2 0.19 0.27 0.71 0.52 0.8 0.73 0.17 0.67 0.9
0.77 0.07 0.15 0.72 0.13 0.44 0.47 0.3 0.6 0.57 0 0.73 0.34 0.92 0.43 0.69
0.31 0.13 0.83 0.5 0.49 0.31 0.63 0.12 0.84 0.04 0.25 0.12 0.19 0.25 0.65 0.17
0.98 0.06 0.94 0.11 0.35 0.28 0.01 0.31 0.47 0.01 0.3 0.47 0.81 0.64 0.37 0.88

Variant No./ Random values

289 290 291 292 293 294 295 296 297 298 299 300 301 302 303 304
0.51 0.85 0.29 0.09 0.28 0.54 0.52 0.01 0.16 0.58 0.39 0.34 0.19 0.65 0.62 0.13
0.49 0.14 0.34 0.15 0.95 0.62 0.58 0.65 0.86 0.55 0.7 0.55 0.26 0.9 0.49 0.65
0.2 0.98 0.58 0.03 0.38 0.5 0.72 0.24 0.26 0.48 0.29 0.39 0.72 0.85 0.84 0.78
0.31 0.63 0.05 0.77 0.77 0.56 0.06 0.88 0.87 0.64 0.46 0.24 0.82 0.46 0.85 0.79
0.26 0.03 0.95 0.35 0.27 0.73 0.48 0.03 0.04 0.8 0.29 0 0.58 0.76 0.07 0.58
0.25 0.1 0.47 0.47 0.09 0.16 0.43 0.96 0.13 0.62 0.67 0.6 0.44 0.92 0.56 0.27
0.42 0.04 0.2 0.83 0.2 0.85 0.66 0.11 0.9 0.62 0.54 0.54 0.33 0.72 0.13 0.15
0.35 0.95 0.84 0.5 0.68 0.77 0.24 0.6 0.29 0.01 0.61 0.87 0.66 0.79 0.52 0.4
0.61 0.63 0.42 0.52 0.25 0.77 0.19 0.54 0.29 0.16 0.29 0.91 0.93 0.06 0.45 0.53
0.77 0.99 0.14 0.03 0.73 0.4 0.43 0.28 0.75 0.26 0.28 0.88 0.96 0.39 0.95 0.87

Variant No./ Random values

305 306 307 308 309 310 311 312 313 314 315 316 317 318 319 320
0.94 0.75 0.72 0.91 0.74 0.64 0.26 0.35 0.74 0.55 0.25 0.4 0.79 0.09 0.14 0.51
0.35 0.71 0.11 0.36 0.94 0.1 0.91 0.19 0.39 0.32 0.51 0.91 0.07 0.6 0.2 0.82
0.52 0.02 0.61 0.87 0.98 0.53 0.18 0.87 0.7 0.58 0.42 0.97 0.25 0.91 0.67 0.78
0.13 0.14 0.96 0.99 0 0.9 0.19 0.21 0.16 0.97 0.17 0.37 0.27 0.84 0.76 0.84
0.72 0.68 0.6 0.84 0.9 0.03 0.37 0.7 0.24 0.24 0.29 0.16 0.51 0.3 0.05 0
0.51 0.68 0.32 0.33 0.64 0.35 0.03 0.89 0.51 0.7 0.29 0.89 0.39 0.22 0.33 0.45



7 0.22 0.01 0.38 0.12 0.8 0.69 0.65 0.01 0.17 0.84 0.4 0.87 0.45 0.19 0.6
0.12 0.12 0.28 0.59 0.93 0.71 0.62 0.31 0.3 0.17 0.11 0.44 0.48 0.46 0.4 0.9
0.38 0.9 0.64 0.49 0.54 0.44 0 0.61 0.98 0.69 0.07 0.54 0.85 0.16 0.02 0.63
0.27 0.5 0.52 0.98 0.34 0.91 0.87 0.4 0.78 0.66 0.8 0.88 0.18 0.33 0.85 0.1

Variant No./ Random values

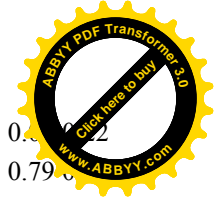
321 322 323 324 325 326 327 328 329 330 331 332 333 334 335 336
0.22 0.83 0.34 0.5 0.85 0.04 0.86 0.08 0.25 0.03 0.93 0.02 0.13 0.32 0.19 0.71
0.55 0.18 0.43 0.06 0.35 0.45 0.5 0.07 0.66 0.82 0.82 0.94 0.93 0.04 0.13 0.77
0.65 0.52 0.79 0.39 0.75 0.17 0.54 0.61 0.39 0.53 0.98 0.46 0.83 0.39 0.36 0.38
0.3 0.47 0.46 0.11 0.99 0.66 0.53 0.85 0.81 0.53 0.84 0.2 0.56 0.85 0.33 0.86
0.21 0.86 0.72 0.52 0.33 0.4 0.28 0.3 0.87 0.11 0.23 0.28 0.27 0.89 0.21 0.25
0.07 0.71 0.26 0.29 0.46 0.32 0.29 0.56 0.39 0.89 0.89 0.89 0.35 0.82 0.11 0.67
0.45 0.62 0.7 0.1 0.21 0.83 0.56 0.46 0.22 0.01 0.34 0.96 0.71 0.51 0.88 0.19
0.09 0.73 0.03 0.81 0.19 0.8 0.04 0.97 0.34 0.07 0.23 0.96 0.1 0.36 0.85 0.4
0.66 0.43 0.19 0.39 0.5 0.97 0.9 0.19 0.06 0.99 0.63 0.95 0.52 0.45 0.3 0.05
0.45 0.05 0.8 0.68 0.55 0.01 0.95 0.67 0.3 0.22 0.92 0.19 0.13 0.93 0.39 0.18

Variant No./ Random values

337 338 339 340 341 342 343 344 345 346 347 348 349 350 351 352
0.56 0.8 0.34 0.49 0.03 0.98 0.2 0.59 0.55 0.1 0.02 0.26 0.35 0.35 0.36 0.19
0.2 0.41 0.99 0.47 0.45 0.53 0.85 0.93 0.81 0.02 0.34 0.39 0.55 0.44 0.95 0.97
0.78 0.37 0.79 0.02 0.37 0.42 0.16 0.17 0.27 0.11 0.17 0.23 0.64 0.34 0.35 0.43
0.94 0.78 0.22 0.18 0.18 0.52 0.86 0.24 0.08 0.51 0.4 0.06 0.66 0.04 0.43 0.32
0.58 0.88 0.56 0.98 0.67 0.05 0.43 0.15 0.47 0.06 0.96 0.57 0.47 0.45 0.85 0.5
0.33 0.23 0.23 0.34 0.21 0.07 0.3 0.15 0.45 0.94 0.05 0.16 0.55 0.37 0.9 0.68
0.66 0.27 0.33 0.37 0.99 0.58 0.51 0.15 0.62 0.57 0.84 0.32 0.29 0.88 0.27 0.37
0.23 0.19 0.89 0.87 0.57 0.14 0.15 0.95 0.78 0.11 0.19 0.63 0.58 0.33 0 0.59
0.4 0.87 0.3 0.68 0.12 0.16 0.02 0.87 0.64 0.96 0.28 0.67 0.44 0.6 0.47 0.74
0.64 0.91 0.59 0.95 0.05 0.49 0.73 0.74 0.25 0.62 0.69 0.01 0.04 0.9 0.37 0.78

Variant No./ Random values

353 354 355 356 357 358 359 360 361 362 363 364 365 366 367 368
0.19 0.86 0.83 0.59 0.38 0.14 0.65 0.74 0.12 0.68 0.04 0.92 0.56 0.48 0.79 0.85
0.56 0.14 0.53 0.72 0.34 0.78 0.67 0.33 0.03 0.9 0.46 0.88 0.38 0.34 0.36 0.34
0.65 0.53 0.79 0.49 0.86 0.41 0.92 0.7 0.56 0.38 0.72 0.93 0.17 0.48 0.72 0.33
0.2 0.83 0.76 0.01 0.12 0.3 0.29 0.91 0.13 0.67 0.93 0.86 0.27 0.08 0.94 0.38



0.79 0.93 0.62 0.01 0.62 0.95 0.15 0.41 0.33 0.71 0.42 0.48 0.92 0.83 0.1
0.01 0.26 0.9 0.14 0.75 0.46 0.68 0.47 0.65 0.35 0.76 0.16 0.47 0.73 0.79
0.75 0.2 0.04 0.9 0.75 0.71 0.55 0.52 0.78 0.19 0.65 0.36 0.21 0.32 0.39 0.26
0.4 0.61 0.6 0.13 0.63 0.58 0.15 0.59 0.07 0.42 0.2 0.2 0.2 0.31 0.87 0.27
0.76 0.05 0.27 0.72 0.19 0 0.55 0.61 0.48 0.42 0.55 0.51 0.87 0.92 0.53 0.03
0.43 0.51 0.39 0.84 0.42 0.53 0.22 0.34 0.15 0.76 0.23 0.36 0.1 0.64 0.25 0.06

Variant No./ Random values

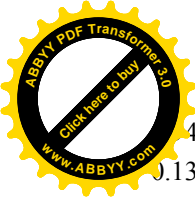
369 370 371 372 373 374 375 376 377 378 379 380 381 382 383 384
0.39 0.04 0.97 0.5 0.08 0.65 0.62 0.71 0.09 0.53 0.59 0.19 0.46 0.58 0.97 0.51
0.41 0.31 0.03 0.48 0.22 0.76 0.93 0.06 0.24 0.74 0.35 0.36 0.32 0.56 0.91 0.6
0.78 0.15 0.47 0.81 0.81 0.15 0.28 0.43 0.66 0.79 0.57 0.06 0.11 0.08 0.61 0.53
0.31 0.5 0.44 0.52 0.12 0.74 0.73 0.92 0.45 0.44 0.94 0.54 0.23 0.68 0.28 0.86
0.06 0.13 0.4 0.84 0.14 0.86 0.37 0.76 0.7 0.09 0.61 0.2 0.71 0.51 0.24 0.91
0.4 0.43 0.02 0.72 0.53 0.86 0.07 0.64 0.82 0.36 0.34 0.14 0.33 0.46 0.23 0.51
0.89 0.75 0.76 0.64 0.52 0.16 0.41 0.37 0.67 0.96 0.9 0.31 0.49 0.5 0.19 0.1
0.85 0.75 0.98 0.44 0.23 0.91 0.98 0.62 0.91 0.64 0.21 0.93 0.99 0.49 0.07 0.23
0.62 0.34 0.64 0.68 0.44 0.11 0.73 0.94 0.03 0.26 0.59 0.18 0.4 0.44 0.37 0.8
0.51 0.33 0.38 0.94 0.52 0.57 0.42 0.39 0.95 0.08 0.29 0.65 0.91 0.22 0.85 0.08

Variant No./ Random values

385 386 387 388 389 390 391 392 393 394 395 396 397 398 399 400
0.55 0.58 0.21 0.57 0.25 0.03 0.1 0.71 0.25 0.7 0.12 0.66 0.83 0.02 0.4 0.29
0.29 0.52 0.52 0.2 0.11 0.87 0.26 0.76 0.75 0.62 0.2 0.41 0.54 0.2 0.51 0.61
0.84 0.16 0.34 0.84 0.75 0.65 0.16 0.99 0.98 0.11 0.61 0.41 0.01 0 0.29 0.96
0.07 0.83 0.86 0.9 0.92 0.91 0.6 0.3 0.28 0.84 0 0.26 0.91 0.04 0.14 0.07
0.92 0.88 0.62 0.15 0.07 0.84 0.24 0.51 0.67 0.09 0.08 0.7 0 0.69 0.92 0.82
0.12 0.06 0.6 0.41 0.83 0.71 0.8 0.65 0.35 0.56 0.72 0.52 0.53 0.25 0.67 0.53
0.28 0.61 0.29 0.1 0.42 0.48 0.77 0.61 0.82 0.58 0.29 0.76 0.51 0.57 0.95 0.98
0.47 0.03 0.56 0.22 0.26 0.29 0.34 0.86 0 0.34 0.15 0.87 0.22 0.98 0.05 0.34
0.98 0.96 0.5 0.22 0.62 0.91 0.74 0.87 0.88 0.2 0.27 0.34 0.2 0.92 0.22 0.24
0.53 0.39 0.85 0.62 0.64 0.76 0.69 0.14 0.9 0.55 0.62 0.84 0.25 0.03 0.91 0.27

Variant No./ Random values

401 402 403 404 405 406 407 408 409 410 411 412 413 414 415 416
0.57 0.71 0.02 0.84 0.02 0.79 0.98 0.06 0.63 0.65 0.82 0.54 0.88 0.92 0.64 0.88
0.02 0.54 0.56 0.61 0.01 0.72 0.96 0.7 0.26 0.64 0.07 0.65 0.59 0.04 0.29 0.09



4 0.56 0.81 0.5 0.65 0.26 0.53 0.05 0.37 0.18 0.29 0.41 0.27 0.03 0.36 0.93
0.13 0.78 0.51 0.78 0.6 0.9 0.4 0.7 0.86 0.67 0.11 0.49 0.65 0.58 0.34 0.34
0.34 0.76 0.93 0.38 0.57 0.81 0.71 0.13 0.86 0.45 0.58 0.73 0.67 0.81 0.23 0.01
0.45 0.87 0.68 0.71 0.26 0.6 0.34 0.89 0.13 0.9 0.95 0.62 0 0.99 0.39 0.36
0.1 0.31 0.02 0.91 0.61 0.61 0.52 0.88 0.13 0.84 0.37 0.9 0.99 0.04 0.23 0.17
0.47 0.33 0.63 0.94 0.8 0.45 0.75 0.93 0.14 0.93 0.14 0.05 0.29 0.76 0.34 0.75
0.74 0.81 0.19 0.35 0.67 0.09 0.11 0.01 0.37 0.75 0.17 0.21 0 0.8 0.31 0.55
0.9 0.24 0.85 0.3 0.9 0.66 0.92 0.03 0.76 0.71 0.92 0.2 0.33 0.22 0.9 0.94

Variant No./ Random values

417 418 419 420 421 422 423 424 425 426 427 428 429 430 431 432
0.33 0.46 0.76 0.85 0.14 0.22 0.14 0.47 0.73 0.79 0.39 0.37 0.51 0.7 0.34 0.43
0.66 0.19 0.91 0.04 0.03 0.37 0.51 0.11 0.73 0.54 0.71 0.91 0.85 0.5 0.46 0.44
0.9 0.26 0.36 0.55 0.12 0.81 0.62 0.28 0.82 0.44 0.62 0.57 0.59 0.16 0.33 0.3
0.39 0.1 0.72 0.25 0.38 0.37 0.42 0.18 0.21 0.4 0.88 0.35 0.08 0.65 0.73 0.91
0.77 0.15 0.09 0.68 0.28 0.87 0.47 0.82 0.65 0.69 0.95 0.99 0.57 0.44 0.9 0.66
0.17 0.58 0.34 0.41 0.37 0.52 0.23 0.97 0.09 0.68 0.34 0.08 0 0.53 0.55 0.98
0.49 0.17 0.54 0.17 0.38 0.18 0.83 0.99 0.94 0.46 0.97 0.48 0.67 0.62 0.65 0.51
0.65 0.82 0.76 0.58 0.48 0.35 0.88 0.45 0.31 0.42 0.77 0.56 0.87 0.9 0.02 0.9
0.95 0.17 0.02 0.83 0.52 0.97 0.16 0.34 0.45 0.62 0.12 0.96 0.4 0.43 0.52 0.31
0.17 0.6 0.06 0.65 0.1 0.12 0.41 0.2 0.06 0.59 0.75 0.58 0.51 0.27 0.61 0.78

Variant No./ Random values

433 434 435 436 437 438 439 440 441 442 443 444 445 446 447 448
0.58 0.38 0.29 0.2 0.41 0.97 0.48 0.44 0.23 0.6 0.8 0.07 0.19 0.3 0.45 0.76
0.18 0.93 0.23 0.49 0.22 0.92 0.79 0.65 0.01 0.98 0.75 0.18 0.72 0.12 0.72 0.67
0.5 0.79 0.81 0.25 0.54 0.7 0.95 0.89 0.04 0.55 0.63 0.57 0.92 0.12 0.21 0.03
0.33 0.46 0.69 0.74 0.99 0.23 0.56 0.3 0.25 0.49 0.47 0.8 0.24 0.9 0.11 0.41
0.95 0.21 0.23 0.82 0.81 0.53 0.09 0.11 0.4 0.79 0.07 0.38 0.6 0.25 0.15 0.22
0.74 0.29 0.95 0.81 0.8 0.72 0.47 0.16 0.25 0.91 0.66 0.85 0.45 0.13 0.33 0.12
0.39 0.48 0.04 0.94 0.7 0.79 0.11 0.91 0.53 0.26 0.73 0.43 0.02 0.82 0.44 0.18
0.6 0.41 0.42 0.63 0.63 0.95 0.48 0 0.04 0.48 0 0.26 0.7 0.49 0.62 0.48
0.2 0.17 0.92 0.89 0.64 0.76 0.69 0.75 0.83 0.18 0.32 0.71 0.31 0.42 0.51 0.7
0.29 0.69 0.23 0.48 0.89 0.62 0.76 0.68 0.44 0.03 0.23 0.26 0.09 0.27 0.52 0.49



Ганна Петрівна Корзун

**ПОБУДОВА І ДОСЛІДЖЕННЯ
МАТЕМАТИЧНОЇ МОДЕЛІ
ЗАЛЕЖНОСТІ МАГНІТНОГО МОМЕНТУ
ЗЕМЛІ ВІД ШИРОТИ МЕТОДОМ
СТАТИСТИЧНИХ ВИПРОБУВАНЬ МОНТЕ
КАРЛО**
Апроксимація поліномом третього степеня

Модель ПГБ-10-208

Книга написана за матеріалами роботи наукової фізико-
математичної школи МЕНУ

**Науковий керівник – кандидат технічних наук,
доцент Літнарівч Руслан Миколайович**

*Комп'ютерний набір, верстка – дизайн у
редакторі Microsoft® Office 2007® Word*

Г.П.Корзун

**МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
МІЖНАРОДНИЙ ЕКОНОМІКО-ГУМАНІТАРНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
Ім.акад. С.Дем'янчука**

**Кафедра Математичного моделювання
33027, м.Рівне, Україна
вул.акад. С.Дем'янчука, 4, корпус 1
Телефон: (+00380) 362 23-73-09
Факс: (+00380) 362 23-01-86
E-mail: mail@regi.rovno.ua**

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
МІЖНАРОДНИЙ ЕКОНОМІКО-ГУМАНІТАРНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
Ім.акад. С.Дем'янчука

Г.Д. Салей

**ПОБУДОВА І ДОСЛІДЖЕННЯ
МАТЕМАТИЧНОЇ МОДЕЛІ
ЗАЛЕЖНОСТІ МАГНІТНОГО МОМЕНТУ
ЗЕМЛІ ВІД ШИРОТИ МЕТОДОМ
СТАТИСТИЧНИХ ВИПРОБУВАНЬ МОНТЕ
КАРЛО**

Апроксимація поліномом третього степеня



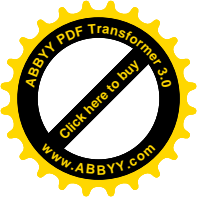
Модель ПГБ10-212

Науковий керівник:
кандидат технічних наук,
доцент Р. М. Літнарович

Рівне – 2010



Салей Ганна Дмитрівна



УДК 53. 02:550.38

Салей Г.Д. Побудова і дослідження математичної моделі залежності магнітного моменту Землі від широти методом статистичних випробувань Монте Карло. Апроксимація поліномом третього степеня. Модель ПГБ10-212.МЕГУ, Рівне, 2010, 62 с.

Рецензент: В. Г.Бурачек, доктор технічних наук, професор

Відповідальний за випуск: Й. В. Джунь, доктор фізико-математичних наук, професор

Книга написана за матеріалами роботи наукової фізико-математичної школи МЕГУ

Встановлюється функціональна залежність магнітного моменту планети Земля від геомагнітної широти. Дається вивід формули у вигляді поліному третього порядку.

Математична модель будується на основі способу найменших квадратів.

Проводиться дослідження точності зрівноважених елементів методом статистичних випробувань Монте Карло.

Для студентів і аспірантів напрямку наук про Землю.

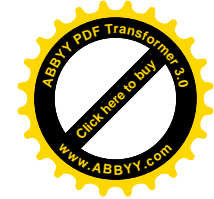
Functional dependence of magnetic moment of planet is set Earth from a geomagnetical breadth. The conclusion of formula is given in a kind to the polynomial of the third order.

A mathematical model is built on the basis of method of leastsquares.

Research of exactness of the balanced elements is conducted by the method of statistical tests of Monte Karlo.

For students and graduate students of direction of sciences about Earth.

© Г.Д.Салей, 2010



ЗМІСТ

Передмова.....	5
Розділ 1. Геомагнітний момент Землі.....	6
1.1. Представлення геомагнітного моменту поля Землі.....	6
1.2. Представлення істинної моделі.....	12
Розділ 2. Побудова спотвореної моделі.....	14
2.1. Генерування істинних похибок для дослідження математичної моделі методом статистичних випробувань Монте Карло.....	14
2.2. Представлення спотвореної моделі.....	16
Розділ 3. Зрівноваження моделі.....	17
3.1. Представлення системи нормальних рівнянь.....	17
3.2. Встановлення коефіцієнтів нормальних рівнянь.....	18
3.3. Рішення нормальних рівнянь способом Крамера	20
Розділ 4. Оцінка точності.....	26
4.1. Контроль зрівноваження	26
4.2. Оцінка точності параметрів, отриманих із системи нормальних рівнянь	26
Висновки.....	32
Літературні джерела	34
Додатки	36

Передмова

Безумовний науковий і практичний інтерес представляє дослідження геомагнітного поля Землі.

Вивченню природи геомагнітного поля і в наш час приділяється велика увага. Вчені намагаються отримати відповіді на запитання: коли і як зародилося магнітне поле земної кулі? Чому воно існує мільярди років? Як це поле буде змінюватись в майбутньому?

В даній роботі ми зробимо спробу виразити один із основних компонентів геомагнітного поля Землі магнітний момент планети графічно і встановити функціональну залежність магнітного моменту від широти.

Нами підбирається емпірична формула у вигляді поліному третього порядку. Математична модель будується на основі способу найменших квадратів. Побудована ймовірніша модель приймається як істинна модель, на основі якої проводяться дослідження точності методом статистичних випробувань Монте Карло. Генеруються псевдо випадкові числа, які приймаються як істинні похибки, якими спотворюється істинна модель.

В подальшому методом найменших квадратів урівноважується спотворена модель і робиться оцінка точності врівноважених елементів. Значення істинних похибок дає можливість зробити порівняльний аналіз. Набирається велика статистика шляхом побудови і дослідження великої кількості моделей.

Розроблена методика дозволить зробити попередній розрахунок точності при проектуванні майбутніх геомагнітних досліджень в будь-якій точці планети Земля.

Розділ 1. Геомагнітний момент Землі

1.1. Представлення геомагнітного моменту поля Землі

Магнітний момент – це векторна величина, яка характеризує земну кулю як джерело магнітного поля. Макроскопічні магнітні моменти створюють замкнуті електричні струми і впорядковано орієнтовані магнітні моменти атомних частинок.

Розрахуємо магнітний момент M Землі на екваторі при $\Phi_{\text{маг. Екв.}} = 0$.

При цьому спочатку розглянемо елементи земного магнетизму.

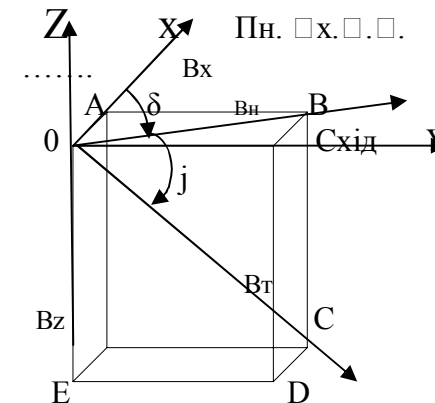


Рис.1.1. Елементи земного магнетизму

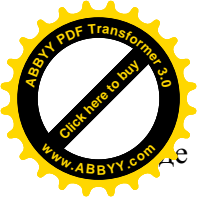
Проекції B_z і B_n індукції дипольного поля, або поля однорідного намагнічування Землі, можна знайти за допомогою формул.

Вертикальна складова геомагнітного поля Землі

$$B_z = \mu_0 \frac{M}{2\pi R^3} \sin \Phi_m \quad (1.1);$$

горизонтальна складова

$$B_n = \mu_0 \frac{M}{4\pi R^3} \cos \Phi_m \quad (1.2)$$



де μ_0 – магнітна стала;

M – магнітний момент земної кулі;

R – радіус Землі;

φ_m – геомагнітна широта, яка відраховується від геомагнітного екватора

Із приведених формул легко знайти модуль вектора індукції поля однорідного намагнічування Земної кулі:

$$\beta_T = \sqrt{B_Z^2 + B_H^2} \quad (1.3).$$

Підставляючи (1.1), (1.2) в (1.3), будемо мати:

$$\beta_T = \sqrt{\mu_0^2 \frac{M^2}{2\pi^2 R^6} \left(\sin^2 \varphi_m + \frac{\cos^2 \varphi_m}{4} \right)};$$

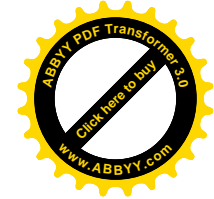
або:

$$\beta_T = \mu \frac{M}{2\pi R^3} \sqrt{\frac{4\sin^2 \varphi_m + \cos^2 \varphi_m}{4}}.$$

Приймаючи до уваги, що $\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi = 1$, а $4\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi = 3\sin^2 \varphi + \sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi$;

$$\beta_T = \mu \frac{M}{4\pi R^3} \sqrt{3\sin^2 \varphi + 1} \quad (1.4).$$

Знайдемо магнітний момент M із формули (1.4)



$$M = \frac{4\pi R^3 B_T}{\mu \sqrt{3\sin^2 \varphi_m + 1}} \quad (1.5).$$

Напруженість магнітного поля на магнітному екваторі $H_{\text{екв.}} = 0,34$ ерстеда [3, – с. 163].

Для переходу із системи СГСМ у систему СІ складемо слідууючу пропорцію

$$\text{Напруженості } 1 \frac{a}{m} \text{ відповідає } 4\pi \cdot 10^{-3} e, \\ H_{\text{екв.}} \text{ дорівнює } 0,34 e,$$

звідки

$$H_{\text{екв.}} = \frac{1 \frac{a}{m} \cdot 0,34 e}{4\pi \cdot 10^{-3} e} = 27,05634033 \frac{a}{m}.$$

В загальному випадку напруженість магнітного поля Землі можна розрахувати за формулою

$$H = \frac{B_T}{\mu_0} = \frac{M}{4\pi R^3} \sqrt{3\sin^2 \varphi_m + 1} \quad (1.6).$$

Тоді, загальна формула розрахунку магнітного моменту Землі буде

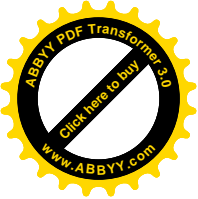
$$M = \frac{4\pi R^3 H}{\sqrt{1 + 3\sin^2 \varphi_m}}. \quad (1.7)$$

Для полюса $H_{\text{пол.}} = 0,66$ ерстед. Тоді, при переході до системи СІ

$$1 \frac{a}{m} \text{ відповідає } 4\pi \cdot 10^{-3} e,$$

$$H_{\text{пол.}} \text{ дорівнює } 0,66 e,$$

звідки



$$H_{\text{пол.}} = \frac{1 \frac{a}{m} \cdot 0,66e}{4\pi \cdot 10^{-3} e} = 52,52113122 \frac{a}{m}.$$

Магнітний момент Землі біля полюсів

$$M_{\text{пол.}} = \frac{H_{\text{пол.}} \cdot 4\pi R^3}{\sqrt{1 + 3 \sin^2 90^\circ}}$$

Взявши радіус земної кулі $R=6371000\text{м}$, а $4\pi R^3 = 3,249620751 \cdot 10^{21} \text{ м}^3$, магнітний момент земної кулі на екваторі буде

$$\frac{M_{\text{екв.}} = \frac{3,249620751 \cdot 10^{21} [\text{м}^3] \cdot 27,05634033 [\frac{a}{m}]}{1} = 8,792284498 \cdot 10^{22} \text{ ам}^2$$

Розрахуємо магнітний момент земної кулі на полюсі

$$\frac{M_{\text{пол.}} = \frac{3,249620751 \cdot 10^{21} \cdot 52,52113122}{2} = 8,533687894 \cdot 10^{22} \text{ ам}^2$$

Розрахуємо магнітний момент Землі на широті 45° , прийнявши середнє значення напруженості

$$H_{45^\circ} = \frac{H_0 + H_{90^\circ}}{2} = \frac{0,34e + 0,66e}{2} = 0,50e$$

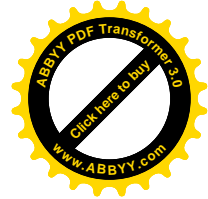
Тоді

$$1 \frac{a}{m} \text{ відповідає } 4\pi \cdot 10^{-3} e$$

$$H_{45^\circ} \text{ дорівнює } 0,5 e.$$

Звідки

$$H_{45^\circ} = \frac{1 \frac{a}{m} \cdot 0,5e}{4\pi \cdot 10^{-3} e} = 39,78873577 \frac{a}{m}$$



Таким чином, напруженість магнітного поля H_{45° буде

$$H_{45^\circ} = \frac{3,249620751 \cdot 10^{21} \text{ м}^3 \cdot 39,78873577 \frac{a}{m}}{\sqrt{1 + 3 \sin^2 45^\circ}}$$

$$H_{45^\circ} = 8,177542602 \cdot 10^{22} \text{ ам}^2$$

Знайдемо середню напруженість магнітного поля Землі для широти $22,5^\circ$

$$H_{22,5^\circ} = \frac{0,34e + 0,5e}{2} = 0,42 e,$$

для $\varphi_{\text{маг.}} = 67,5^\circ$

$$H_{67,5^\circ} = \frac{0,5e + 0,6e}{2} = 0,58e$$

для $\varphi_{\text{маг.}} = 22,5^\circ$

$$1 \frac{a}{m} \text{ відповідає } 4\pi \cdot 10^3 e$$

$$H_{22,5^\circ} \text{ дорівнює } 0,42 e$$

звідки

$$H_{22,5^\circ} = \frac{1 \frac{a}{m} \cdot 0,42e}{4\pi \cdot 10^3 e} = 33,422538 \frac{a}{m},$$

І по аналогії

$$H_{67,5^\circ} = \frac{1 \frac{a}{m} \cdot 0,58e}{4\pi \cdot 10^3 e} = 46,1549335 \text{ ам}^2.$$

Магнітні моменти будуть відповідно

$$\frac{3,249620751 \cdot 10^{21} \cdot 33,42253805}{\sqrt{1 + 3 \sin^2 22,5^0}} = 9,052956514 \cdot 10^{22} \text{ ам}^2,$$

$$M_{67,5^0} = \frac{3,249620751 \cdot 10^{21} \cdot 46,1549335}{\sqrt{1 + 3 \sin^2 67,5^0}} = 7,948506716 \cdot 10^{22} \text{ ам}^2$$

Результати залежності геомагнітного моменту Землі від широти точки спостереження зведено в **Табл 1**.

Таблиця 1. Залежність геомагнітного моменту Землі від широти точки спостереження

№	$\varphi_{\text{маг.}} = X$	$Y = M = f(x) \left(\frac{a}{M} \right)$
1	0,00	$8,79 \cdot 10^{22} *$
2	11,25	$8,9 \cdot 10^{22}$
3	22,5	$9,05 \cdot 10^{22}$
4	33,75	$8,5 \cdot 10^{22}$
5	45	$8,18 \cdot 10^{22}$
6	56,25	$8 \cdot 10^{22}$
7	67,5	$7,95 \cdot 10^{22}$
8	78,75	$8,12 \cdot 10^{22}$
9	90	$8,53 \cdot 10^{22}$
n=9		$\Sigma = 76,02 \cdot 10^{22}$

Згідно формули (1,7) магнітний момент залежить від напруженості магнітного поля і широти точки спостереження, тобто є функцією двох незалежних змінних, хоча в свою чергу напруженість геомагнітного поля також залежить від широти. На жаль, у нас немає формули залежності напруженості магнітного

поля від широти, що не потребувало б знань магнітного моменту і навпаки.

Тому безперечний інтерес представляє встановлення функціональної залежності магнітного моменту, як головного компонента для визначення складових геомагнітного поля Землі, від геомагнітної широти.

Примітка. В подальшому для спрощення викладок множник 10^{22} писати не будемо, але його слід мати на увазі, особливо при оцінці точності результатів.

1.2. Представлення істинної моделі

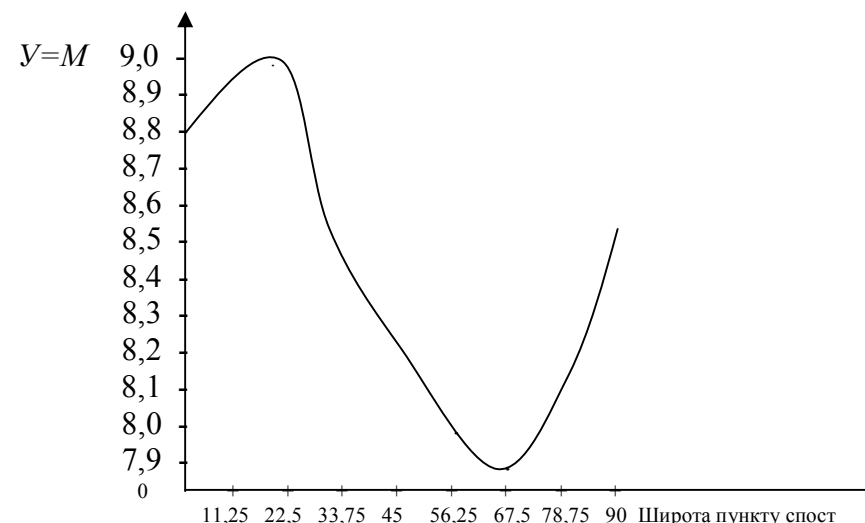


Рис. 1. Графік залежності магнітного моменту земної кулі від геомагнітної широти

Маючи вузлові точки значень геомагнітного моменту Землі в магнітних широтах $0, 22,5^0, 45^0, 67,5^0$ і 90^0 побудуємо точкову діаграму і графік, представлений на рис. 1.

Із цього графіка видно, що екстремум функції буде на широті $22,5^0$ і $67,5^0$. Як видно із графіка, кращою функцією для апроксимації буде кубічний поліном, тобто будемо шукати функціональну залежність у вигляді функції виду

$$y = ax^3 + bx^2 + cx + d \quad (1.2.1)$$

Невідомі коефіцієнти a, b, c, d визначимо по способу найменших квадратів.

Проміжні точки в $11,25^0, 33,75^0, 56,25^0$ і $78,75^0$ визначимо безпосередньо із графіка. Цього нам буде цілком достатньо для побудови експериментальної моделі.

Побудовану таким чином експериментальну модель залежності магнітного моменту земної кулі від широти в подальшому зрівноважили і отримали формулу [7,с.38]

$$Y=M=1.2190*10^{-5} X^3 -1.4404*10^{-3} X^2 +2.8370*10^{-2} X+8,8028(1.2.2)$$

яку приймемо за істинну модель і, генеруючи істинні похибки будемо створювати спотворені моделі, на яких можна дослідити точність визначення магнітного моменту в залежності від похибки визначення широти.

Таблиця 2.Залежність геомагнітного моменту Землі від широти точки спостереження (істинна модель за формулою 1.1)

№	$\varphi_{\text{маг.}} = X$	$Y = M = f(x)(\frac{a}{M})$
1	0	8,803
2	11,25	8,957
3	22,5	8,851
4	33,75	8,598
5	45	8,274
6	56,25	8,011
7	67,5	7,904
8	78,75	8,057
9	84,375	8,264
10	90	8,575
n=9	489,375	84,294

Розділ 2. Побудова спотвореної моделі

2.1. Генерування істинних похибок для дослідження математичної моделі методом статистичних випробувань Монте Карло

В роботі [1] істинна модель спотворювалась введенням істинних похибок в незалежні змінні X. В даній монографії істинні похибки будемо вводити в експериментальні параметри Y.

Приведемо методику розрахунку випадкових чисел, які приймемо в подальшому, як істинні похибки для побудови спотвореної моделі.

1. Отримавши ряд випадкових (а точніше псевдо-

$$\text{випадкових) чисел } \xi_{cp}, \quad \xi_{cp} = \frac{\sum_{i=1}^n \xi_i}{n}, \quad (2.1.1)$$

Де n – сума випадкових чисел.

2. Розраховуються попередні значення істинних похибок Δ'_i за формулою

$$\Delta'_i = \xi_i - \xi_{cp} \quad (2.1.2)$$

3. Знаходять середню квадратичну похибку попередніх істинних похибок за формулою Гауса

$$m_{\Delta'} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n \Delta'^2_i}{n}} \quad (2.1.3)$$

4. Знаходять коефіцієнт пропорційності K, для визначення істинних похибок необхідності точності

$$K = \frac{c}{m'_{\Delta}}, \quad (2.1.4)$$

де c – необхідна константа.

Так, наприклад, при $m'_{\Delta} = 0,28$ і необхідності побудови математичної моделі з точністю $c = 0,1$, будемо мати

$$K_{0,1} = \frac{0,1}{0,28} = 0,357, \text{ а при } c = 0,05, \text{ отримаємо}$$

$$K = \frac{0,05}{0,28} = 0,178.$$

5. Істинні похибки розраховуються за формулою

$$\Delta_i = \Delta'_i \cdot K \quad (2.1.5)$$

6. Заключним контролем служить розрахунок середньої квадратичної похибки m_{Δ} генерованих істинних похибок Δ

$$m_{\Delta} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n \Delta_i^2}{n}} \quad (2.1.6)$$

$$\text{і порівняння} \quad m_{\Delta} = c \quad (2.1.7)$$

Таблиця 3. Генерування псевдо-випадкових чисел і розрахунок істинних похибок

№	ξ_i	ξ_{cp}	$\Delta'_i = \xi_i - \xi_{cp}$	$\Delta_i'^2$	$\Delta_i = \Delta'_i \cdot K$	Δ_i^2
1	0,85	0,416	0,434	0,18836	0,1580	0,02495972
2	0	0,416	-0,416	0,17306	-0,1514	0,02293226
3	0,56	0,416	0,144	0,02074	0,05242	0,00274780
4	0,47	0,416	0,054	0,00292	0,01966	0,00038641
5	0,26	0,416	-0,156	0,02434	-0,0568	0,00322485
6	0,06	0,416	-0,356	0,12674	-0,1296	0,01679423
7	0,57	0,416	0,154	0,02372	0,05606	0,00314269
8	0,5	0,416	0,084	0,00706	0,03058	0,00093502
9	0,75	0,416	0,334	0,11156	0,12158	0,01478268
10	0,14	0,416	-0,276	0,07618	-0,1005	0,01009435
n=10	4,16	4,16	7E-16	0,75464	2,5E-16	0,10000000

Середня квадратична похибка попередніх істинних похибок

$$\Delta'_o = \sqrt{\frac{0,75464}{10}} = 0,2747071181$$

$$\text{Коефіцієнт пропорційності } K = \frac{0,1}{0,2747071181} = 0,3640240584$$

Середня квадратична похибка при генеруванні випадкових чисел з точністю $c = 0,1$

$$m_{\Delta_i} = \sqrt{\frac{0,1000000}{10}} = 0,1$$

2.2. Представлення спотвореної моделі

Таблиця 4. Побудова спотвореної моделі

№	Істинна модель		Δ_i	$Y_{спотв.} = Y_{icm.} + \Delta_i$
	x_{icm}	y_{icm}		
1	0	8,803	0,1580	8,961
2	11,25	8,957	-0,1514	8,806
3	22,5	8,851	0,05242	8,9034
4	33,75	8,598	0,01966	8,6177
5	45	8,274	-0,0568	8,2172
6	56,25	8,011	-0,1296	7,8814
7	67,5	7,904	0,05606	7,9601
8	78,75	8,057	0,03058	8,0876
9	84,375	8,264	0,12158	8,3856
10	90	8,575	-0,1005	8,4745
	489,375	84,294	2,5E-16	84,294

По даним спотвореної моделі виконують строге зрівноваження методом найменших квадратів і отримують ймовірнішу модель, роблять оцінку точності зрівноважених елементів і дають порівняльний аналіз.

Розділ 3. Зрівноваження моделі

3.1. Представлення системи нормальних рівнянь

У результаті проведеного експерименту ми маємо ряд результатів X_i, V_i , функціональну залежність між якими будемо шукати за допомогою поліному степені K , де коефіцієнти a_i являються невідомими.

Тоді, система нормальних рівнянь буде

$$\begin{aligned} na_0 + a_3[x] + a_2[x^2] + \dots + a_m[x^m] - [y] &= 0, \\ a_0[x] + a_3[x^2] + a_2[x^3] + \dots + a_m[x^{m+1}] - [xy] &= 0, \\ a_0[x^2] + a_1[x^3] + a_2[x^4] + \dots + a_m[x^{m+1}] - [x^2y] &= 0, \end{aligned} \quad (3.1.1)$$

$$a_0[x^m] + a_1[x^{m+1}] + a_2[x^{m+2}] + \dots + a_m[x^{2m}] - [x^m y] = 0,$$

де знаком $[\]$ позначена сума відповідного елемента.

Для поліному третього порядку виду

$$y = ax^3 + bx^2 + cx + d \quad (3.1.2)$$

Система нормальних рівнянь буде

$$\begin{aligned} dn + c[x] + b[x^2] + a[x^3] - [y] &= 0, \\ d[x] + c[x^2] + b[x^3] + a[x^4] - [xy] &= 0, \\ d[x^2] + c[x^3] + b[x^4] + a[x^5] - [x^2y] &= 0, \\ d[x^3] + c[x^4] + b[x^5] + a[x^6] - [x^3y] &= 0. \end{aligned} \quad (3.1.3)$$

або

$$\begin{aligned} a[x^6] + b[x^5] + c[x^4] + d[x^3] - [x^3y] &= 0, \\ a[x^5] + b[x^4] + c[x^3] + d[x^2] - [x^2y] &= 0, \\ a[x^4] + b[x^3] + c[x^2] + d[x] - [xy] &= 0, \\ a[x^3] + b[x^2] + c[x] + dn - [y] &= 0. \end{aligned} \quad (3.1.4)$$

В подальшому будемо рishати систему лінійних нормальних рівнянь (3.1.3) або (3.1.4) одним із відомих в математиці способів.

3.2. Встановлення коефіцієнтів нормальних рівнянь

Приведемо розрахункову таблицю, на основі якої стримують коефіцієнти нормальних рівнянь.

Таблиця 5. Розрахунок коефіцієнтів нормальних рівнянь

№	$x_{истн.}$	$y_{снотв}$	x^0	x^2	x^3	x^4	x^5
1	0	8,961	1	0	0	0	0
2	11,25	8,806	1	126,563	1423,828	16018,066	180203,247
3	22,5	8,9034	1	506,250	11390,625	256289,063	5766503,906
4	33,75	8,6177	1	1139,063	38443,359	1297463,379	43789389,038
5	45	8,2172	1	2025,000	91125,000	4100625,000	184528125,000
6	56,25	7,8814	1	3164,063	177978,516	10011291,504	563135147,095
7	67,5	7,9601	1	4556,250	307546,875	20759414,063	1401260449,219
8	78,75	8,0876	1	6201,563	488373,047	38459377,441	3028675973,511
9	84,375	8,3856	1	7119,141	600677,490	50682163,239	4276307523,251
10	90	8,4745	1	8100,000	729000,000	65610000,000	5904900000,000
Σ	489,375	84,294	10	32937,891	2445958,740	191192641,754	15408543314,266

Продовження таблиці 5

№	x^6	xy	x^2y	x^3y
1	0	0	0	0
2	2027286,530	99,0626174	1114,454	12537,61251
3	129746337,891	200,326938	4507,356	101415,5123
4	1477891880,035	290,845934	9816,05	331291,6965
5	8303765625,000	369,774551	16639,85	748793,466
6	31676352024,078	443,329168	24937,27	1402721,196
7	94585080322,266	537,30403	36268,02	2448091,487
8	238508232913,971	636,896769	50155,62	3949755,12
9	360813447274,268	707,533653	59698,15	5037031,573
10	531441000000,000	762,707642	68643,69	6177931,903
Σ	1266937543664,040	4047,781	271780,5	20209569,6

Таким чином, на основі проведених розрахунків нами отримана наступна матриця коефіцієнтів нормальних рівнянь

10,0	489,4	32937,9	2445958,7
489,4	32937,9	2445958,7	191192641,8
32937,9	2445958,7	191192641,8	15408543314,3
2445958,7	191192642	15408543314,3	1266937543664,0

3.3. Рішення системи лінійних рівнянь способом Крамера

Нехай, маємо систему лінійних рівнянь

$$\begin{aligned}
 a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1, \\
 a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2, \\
 &\dots \\
 a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n &= b_n.
 \end{aligned}
 \tag{3.3.1}$$

Для того, щоб із цієї системи визначити невідомі x , складемо із коефіцієнтів при невідомих визначник Δ , який називається визначником системи рівнянь (3.3.1).

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}
 \tag{3.3.2}$$

Помножимо ліву і праву частини рівності (3.3.2) на x_i . В лівій частині будемо мати Δx_i , в правій же частині введемо у всі члени i -го стовпчика визначника a_k і множник x_i

$$\Delta \cdot x_i = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1i}x_i & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2i}x_i & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{ni}x_i & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}
 \tag{3.3.3}$$

Потім до i -го стовпчика визначника (3.3.3) додамо всі інші стовпчики, помножені відповідно на x_1, x_2, \dots, x_n . Величина визначника від цього не зміниться. Тоді i -стовпчик представить собою ліву частину системи рівнянь (3.3.1).

Замінімо його вільними членами цієї системи і позначимо через Δ_i

$$\Delta \cdot x_i = \Delta_i = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & b_1 \dots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & b_2 \dots a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & b_n \dots a_{nn} \end{vmatrix} \quad (3.3.4)$$

$$\text{Звідки, } x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & b_1 \dots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & b_2 \dots a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & b_n \dots a_{nn} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \dots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \dots a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} \dots a_{nn} \end{vmatrix}}. \quad (3.3.5)$$

Формула (3.3.5) дає можливість визначити кожне невідоме системи лінійних рівнянь (3.3.1).

Якщо вільні члени системи лінійних рівнянь рівні нулю, то вона буде системою лінійних однокорінних рівнянь.

Система лінійних одно корінних рівнянь може мати рішення відмінне від нульового, якщо визначник системи Δ рівний нулю.

Для системи чотирьох лінійних рівнянь

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 &= b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 &= b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + a_{34}x_4 &= b_3, \\ a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + a_{43}x_3 + a_{44}x_4 &= b_4, \end{aligned} \quad (3.3.6)$$

якщо визначник системи Δ не дорівнює нулю

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} \neq 0, \quad (3.3.7)$$

то система визначника і по Крамеру її невідомі виражаються формулами

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ b_4 & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}}{\Delta}, \quad (3.3.8)$$

$$x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & b_4 & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}}{\Delta}, \quad (3.3.9)$$

$$x_3 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & b_2 & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & b_3 & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & b_4 & a_{44} \end{vmatrix}}{\Delta}, \quad (3.3.10)$$

$$x_4 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & b_3 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & b_4 \end{vmatrix}}{\Delta} \quad (3.3.11)$$

Як бачимо, що

$$\Delta_{x_1} = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ b_4 & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}, \quad (3.3.12)$$

$$\Delta_{x_2} = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & b_4 & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}, \quad (3.3.13)$$

$$\Delta_{x_3} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & b_2 & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & b_3 & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & b_4 & a_{44} \end{vmatrix}, \quad (3.3.14)$$

$$\Delta_{x_4} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & b_3 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & b_4 \end{vmatrix}. \quad (3.3.15)$$

Приведемо формулу знаходження визначника четвертого порядку

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = (a_{23}a_{43} - a_{33}a_{42})(a_{11}a_{24} - a_{14}a_{21}) + \\ + (a_{32}a_{44} - a_{34}a_{42})(a_{13}a_{21} - a_{11}a_{23}) + (a_{31}a_{43} - a_{33}a_{41})(a_{14}a_{22} - a_{12}a_{24}) + \\ + (a_{31}a_{42} - a_{32}a_{41})(a_{13}a_{24} - a_{14}a_{23}) + (a_{33}a_{44} - a_{34}a_{43})(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) + \\ + (a_{31}a_{44} - a_{34}a_{41})(a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22}). \quad (3.3.16)$$

І в нашому випадку визначник системи $D = 1,38204E+21$

1266937543664,04	15408543314,27	191192642	2445959
15408543314,266	191192642	2445959	32937,891
191192641,754	2445959	32938	489
2445958,740	32938	489	10

20209569,5667	15408543314	191192642	2445959
271780,46372	191192642	2445959	32938
4047,7813032	2445959	32938	489
84,294000000	32938	489	10
D1= 1,40964E+16			

тоді невідомий коефіцієнт a при x^3 буде

$$a = x_1 = \frac{D1}{D} = \frac{1.40964E+16}{1.38204E+21} = 0,000010200;$$

1266937543664	20209569,567	191192642	2445959
15408543314	271780,464	2445959	32938
191192642	4047,781	32938	489,375
2445959	84,2940	489,375	10
D2= -1,5651E+18			

тоді невідомий коефіцієнт b при x^2 буде

$$b = x_2 = \frac{D2}{D} = \frac{-1.5651E + 18}{1.38204E + 21} = -0,001132;$$

1266937543664	15408543314	20209570	2445958,7
15408543314	191192642	271780	32937,891
191192642	2445959	4048	489,375
2445959	32938	84,294	10
D3=	2,1213E+19		

і невідомий коефіцієнт c при x буде

$$c = x_3 = \frac{D3}{D} = \frac{2,1213E + 19}{1.38204E + 21} = 0,015349;$$

1266937543664	15408543314	191192642	20209570
15408543314	191192642	2445959	271780
191192642	2445959	32938	4048
2445959	32938	489,375	84,294
D4=	1,2319E+22		

коефіцієнт d буде

$$d = \frac{D4}{D} = \frac{1,2319E + 22}{1.38204E + 21} = 8,913551.$$

Таким чином, на основі проведених досліджень, математична модель залежності магнітного моменту планети Земля y_i від широти пункту спостереження x_i виражається формулою

$$\delta' = 0,000010200\delta^3 - 0,001132\delta^2 + 0,015349\delta + 8,913551. \quad (3.3.17)$$

Розділ 4. Оцінка точності

4.1. Контроль зрівноваження

Підставляючи отримані значення коефіцієнтів a, b, c, d у формулу (3.4), отримаємо наступні результати.

Таблиця 6. Коефіцієнти нормальних рівнянь і контроль зрівноваження

	x^3	x^2	x	x^0	y	Контроль
$[x^3]$	1266937543664,04	15408543314,27	191192642	2445959	20209569,57	20209569,567
$[x^2]$	15408543314,266	191192642	2445959	32937,891	271780,464	271780,464
$[x]$	191192641,754	2445959	32938	489	4047,781	4047,781
$[x^0]$	2445958,740	32938	489	10	84,294	84,294
	0,000010200	-0,001132	0,015349	8,913551		
	Ошибка! Объект не может быть создан из кодов полей редактирования.	b	c	d		

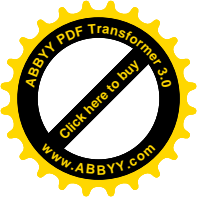
$$[Y] - d[YX^3] - b[YX^2] - c[YX] - d[Y]$$

$$= 0,080217651. \quad \text{З другої сторони } [VV] = 0,080218$$

4.2. Оцінка точності параметрів, отриманих із рішення системи нормальних рівнянь

Середні квадратичні похибки визначаємих x_1, x_2, x_3, x_4 розраховуються за формулами:

$$m_{x_1} = \mu \sqrt{\frac{A_{11}}{D}}, \quad (4.2.1)$$



$$m_{x_2} = \mu \sqrt{\frac{A_{22}}{D}}, \quad (4.2.2)$$

$$m_{x_3} = \mu \sqrt{\frac{A_{33}}{D}}, \quad (4.2.3)$$

$$m_{x_4} = \mu \sqrt{\frac{A_{44}}{D}}, \quad (4.2.4)$$

де $m_{x_1}, m_{x_2}, m_{x_3}, m_{x_4}$ – середні квадратичні похибки визначаємих невідомих x_1, x_2, x_3, x_4 , μ – середня квадратична похибка одиниці ваги, яка розраховується за формулою

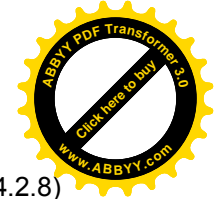
$$\mu = \sqrt{\frac{[VV]}{n-K}} \quad (4.2.5)$$

У формулі (4.2.5) n - число початкових рівнянь, K - число невідомих. В нашому випадку $n=10; K=4$. V - різниця між вихідним значенням y_i і вирахуванням значенням y' за отриманою нами формулою (3.3.17);

$$V_i = y_i - y'_i \quad (4.2.6)$$

$A_{11}, A_{22}, A_{33}, A_{44}$ – алгебраїчні доповнення першого, другого, третього і четвертого діагональних елементів

$$A_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}, \quad (4.2.7)$$



$$A_{22} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} & a_{14} \\ a_{31} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}, \quad (4.2.8)$$

$$A_{33} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{24} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{vmatrix}, \quad (4.2.9)$$

$$A_{44} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad (4.2.10)$$

$$\text{де } \Delta = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} + a_{14}A_{14}. \quad (4.2.11)$$

Приведемо формулу розкриття визначника третього порядку

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) + a_{12}(a_{23}a_{31} - a_{21}a_{33}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}). \quad (4.2.12)$$

І в нашому випадку отримаємо

		191192642	2445959	32938
A11=	4,7761E+11	2445959	32938	489,375
		32937,891	489,375	10

величина оберненої ваги

$$\frac{1}{P_{x_1}} = \frac{A_{11}}{D} = \frac{4.7761E+11}{1.38204E+21} = 3.45593E-10, \text{ а}$$

$$\sqrt{\frac{1}{P_{x_{11}}}} = 0,00001859.$$

			1266937543664	191192642	2445959
A22=	8,99382E+15		191192642	32938	489,375
			2445959	489	10

$$\frac{1}{P_{x_2}} = \frac{A_{22}}{D} = \frac{8,99382E+15}{1.38204E+21} = 0,000006508; \sqrt{\frac{1}{P_{x_{22}}}} = 0,00255.$$

A33=	1,24719E+19		1266937543664	15408543314	2445959
			15408543314	191192642	32938
			2445959	32938	10

$$\frac{1}{P_{x_3}} = \frac{A_{33}}{D} = \frac{1,24719E+19}{1.38204E+21} = 0,00902; \sqrt{\frac{1}{P_{x_{33}}}} = 0,0950.$$

			1266937543664	15408543314	191192642
A44=	1.1858101E+21		15408543314	191192642	2445959
			191192642	2445959	32938

$$\frac{1}{P_{x_4}} = \frac{A_{44}}{D} = \frac{1,1858101E+21}{1.38204E+21} = 0,8580; \sqrt{\frac{1}{P_{x_{44}}}} = 0,9263.$$

Підставляючи у виведену нами, формулу (3.3.17) значення X спотвореної моделі отримаємо розрахункові значення y' , які будуть дещо відрізнятися від вихідних значень Y .

Таблиця 6. порівняльний аналіз результатів строгого зрівноваження

№	$x_{істн.}$	$y_{спотв.}$	$y'_{зрівноваж}$	$V = y_i - y'_i$	V^2
1	0	8,961	8,9135511	4,744E-02	0,002250108
2	11,25	8,806	8,9574206	-1,519E-01	0,023059834
3	22,5	8,9034	8,801771	1,016E-01	0,010332412
4	33,75	8,6177	8,5337384	8,392E-02	0,007042389
5	45	8,2172	8,2404589	-2,325E-02	0,000540407
6	56,25	7,8814	8,0090687	-1,277E-01	0,016297411
7	67,5	7,9601	7,9267041	3,336E-02	0,001112597
8	78,75	8,0876	8,0805011	7,077E-03	5,00832E-05
9	84,375	8,3856	8,2731902	1,124E-01	0,012632369
10	90	8,4745	8,5575958	-8,307E-02	0,006900041
n=10	489,375	84,294	84,29	0,0000000	0,080218

Тоді, середня квадратична похибка одиниці ваги буде

$$\mu = \sqrt{\frac{[VV]}{n - K}} = 0,115627023.$$

Середня квадратична похибка визначення коефіцієнта a

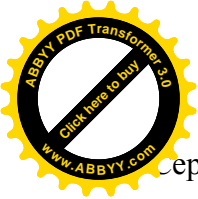
$$m_a = \mu \sqrt{\frac{1}{P_a}} = 0,115627023 * 0,00001859 = 2,14949E-06$$

Середня квадратична похибка визначення коефіцієнта b

$$m_b = \mu \sqrt{\frac{1}{P_b}} = 0,115627023 * 0,00255 = 0,000294966$$

Середня квадратична похибка визначення коефіцієнта c

$$m_{\tilde{n}} = \mu \sqrt{\frac{1}{P_{\tilde{n}}}} = 0,115627023 * 0,0950 = 0,010984158$$



Середня квадратична похибка визначення коефіцієнта d

$$m_d = \mu \sqrt{\frac{1}{P_d}} = 0,115627023 * 0,9263 = 0,107104381.$$

Середні квадратичні похибки зрівноваженої функції $m\phi=$

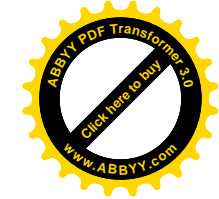
0,10710438
0,06623884
0,07039257
0,06467199
0,058428
0,06455843
0,06870054
0,05855716
0,0627905
0,09385587

Перевірка моделі на адекватність за критерієм Фішера

Перевірка на адекватність за критерієм Фішера		
32,1725	>	4,533677
Модель адекватна експериментальним даним		

Встановлення значимості коефіцієнтів регресії

Коефіцієнти регресії значимі			
ta=	4,745186	t(0,05;6)=	2,446912
tb=	3,83931		
tc=	1,397362	t(0,08;6)=	2,104306
td=	83,22303		



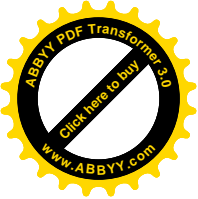
Висновки

На основі проведених досліджень в даній роботі:

1. Генеровані випадкові числа, які приведено до нормованої досліджуваної точності.
2. На основі істинної моделі і генерованих істинних похибок побудована спотворена модель залежності магнітного моменту Землі від широти.
3. Математична модель апроксимована по способу найменших квадратів кубічним поліномом.
4. Отримана формула

$$y' = 0,000010200x^3 - 0,001132x^2 + 0,015349x + 8,913551.$$
 залежності магнітного моменту Землі Y від широти X .
5. Встановлено, що середня квадратична похибка одиниці ваги за результатами зрівноваження складає
 $\mu = 0,115627023.$
6. Середня квадратична похибка визначення коефіцієнта a при x^3 $m_a = 2,14949E - 06$;
 - середня квадратична похибка визначення коефіцієнта b при x^2 $m_b = 0,000294966$;
 - середня квадратична похибка визначення коефіцієнта c при x $m_c = 0,010984158$;
 - середня квадратична похибка визначення коефіцієнта d при $m_d = 0,107104381.$

середні квадратичні похибки зрівноваженої функції $m\phi=$

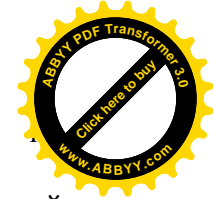


0,10710438
0,06623884
0,07039257
0,06467199
0,058428
0,06455843
0,06870054
0,05855716
0,0627905
0,09385587

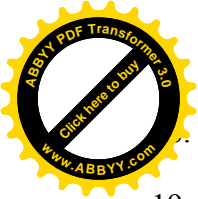
7. Розроблена методика підготовки істинних похибок наперед заданої точності.
8. Дана робота відкриває дорогу для проведення досліджень методом статистичних випробувань Монте Карло.
9. Вона дає можливість охопити велику аудиторію, тому що генеруються похибки індивідуально і вони не повторюються в других моделях.
10. Робота виконується вперше. Нам не відомі літературні джерела, де б виконувались аналогічні дослідження в курсі Фізики з основами геофізики.

Літературні джерела

1. Букеев Б.О. Дослідження точності апроксимації залежності магнітного моменту Землі від широти методом статистичних випробувань Монте Карло. Модель ПГБ 61-.МЕГУ, Рівне, 2006, -29с.
2. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике. – М.: Наука, 1973,-831с.

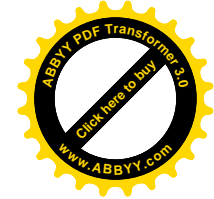


3. Кошкин Н. И., Ширкевич М. Г. Справочник элементарной физике. – М.: Наука, 1972,-255с.
4. Кучерук І. М., Горбачук І. Т., Луцик П. П. Загальний курс фізики. Т. 1. – К.: Техніка, 1999,-536с.
5. Кучерук І. М., Горбачук І. Т., Луцик П. П. Загальний курс фізики. Т. 2. – К.: Техніка, 1999,-452с.
6. Кучерук І. М., Горбачук І. Т. Загальний курс фізики. Т.3 . – К.: Техніка, 1999,-520с.
7. Літнарівич Р. М. Дослідження точності апроксимації залежності магнітного моменту Землі від широти методом статистичних випробувань Монте Карло. Частина 1. МЕГУ, Рівне, 2006,-44с.
8. Літнарівич Р.М. Встановлення зв'язку між географічною і геомагнітною системами координат. Частина 2.МЕГУ,Рівне,2006,-47с.
9. Літнарівич Р.М. Фізика з основами геофізики. Курс лекцій.МЕГУ,Рівне,2007,-78с.
10. Літнарівич Р.М. Фізика з основами геофізики. Лабораторний практикум. Частина 1.МЕГУ,Рівне,2007,-44с.
11. Літнарівич Р.М. Фізика з основами геофізики. Лабораторний практикум. Частина 2.МЕГУ,Рівне,2008,-48с.
12. Мудров В. И., Кушко В. Л. Методы обработки измерений. – М.: Сов. радио, 1976,-192с.
13. Пастушенко С. М. Формули і закони загальної фізики: навчальний посібник для студентів вищих навчальних закладів. 2е вид.: Діал., 2005,-266с.
14. Рого К. Г. Метрологическая обработка результатов технических измерений. Справочное пособие. – К.:Техніка, 1987,-126с.
15. Розв'язування задач з курсу загальної фізики. Практикум/Остроухов А. А., Стрижевський В. Л., Цвілих М. Г. та інші. –К.: Радянська школа, 1966,-503с
16. Савельев И. В. Курс физики. Т.1. –М.:Наука, 1989,-352с
17. Савельев И. В. Курс физики. Т.2. –М.:Наука, 1989,-464с



Савельев И. В. Курс общей физики. –М.:Наука, 1982, - 304с

19. Ситніков О. П. Основи електродинаміки. Лабораторний практикум. Чернігів: ЧДІЕіУ, 2003,-48с
20. Суботін С. І. Кора і мантія Землі. –К.: Знання,1996, -39с.
21. Топографо-геодезические термины: справочник/ Кузьмин Б. С., Герасимов Ф. Я., Молоканов В. М. и др. – М.: Недра, 1989,-261с.
22. Федоров Є. П. Обертання Землі. – К.:Знання, 1966,-52с
23. Фізика з використанням обчислювальної техніки. Практичний курс/ В. М. Казанський, В. І. Кланченко, Д. Кошелева та ін. – К.: Либідь, 1993,-224с.



Додатки

Додаток 1.

Генерування псевдовипадкових чисел, підпорядкування їх нормальному закону розподілу і розрахунок істинних похибок

0,85	0,416	0,434	0,18836	0,1580	0,02495972
0	0,416	-0,416	0,17306	-0,1514	0,02293226
0,56	0,416	0,144	0,02074	0,05242	0,00274780
0,47	0,416	0,054	0,00292	0,01966	0,00038641
0,26	0,416	-0,156	0,02434	-0,0568	0,00322485
0,06	0,416	-0,356	0,12674	-0,1296	0,01679423
0,57	0,416	0,154	0,02372	0,05606	0,00314269
0,5	0,416	0,084	0,00706	0,03058	0,00093502
0,75	0,416	0,334	0,11156	0,12158	0,01478268
0,14	0,416	-0,276	0,07618	-0,1005	0,01009435
4,16	4,16	7E-16	0,75464	2,5E-16	0,10000000
A	B	C	D	E	F

Додаток 2.

Побудова спотвореної моделі

0	8,803	0,1580	8,961
11,25	8,957	-0,1514	8,806
22,5	8,851	0,05242	8,9034
33,75	8,598	0,01966	8,6177
45	8,274	-0,0568	8,2172
56,25	8,011	-0,1296	7,8814
67,5	7,904	0,05606	7,9601
78,75	8,057	0,03058	8,0876
84,375	8,264	0,12158	8,3856
90	8,575	-0,1005	8,4745
489,375	84,294	2,5E-16	84,294
I	G	E	H
Хексп.=Хістн.	Уістн.	Істинні похиб.	Усптв.

Додаток 3.

Розрахункова таблиця

0	1	0	0	0	0	0
11,25	1	126,563	1423,828	16018,066	180203,247	2027286,530
22,5	1	506,250	11390,625	256289,063	5766503,906	129746337,891
33,75	1	1139,063	38443,359	1297463,379	43789389,038	1477891880,035
45	1	2025,000	91125,000	4100625,000	184528125,000	8303765625,000
56,25	1	3164,063	177978,516	10011291,504	563135147,095	31676352024,078
67,5	1	4556,250	307546,875	20759414,063	1401260449,219	94585080322,266
78,75	1	6201,563	488373,047	38459377,441	3028675973,511	238508232913,971
84,375	1	7119,141	600677,490	50682163,239	4276307523,251	360813447274,268
90	1	8100,000	729000,000	65610000,000	5904900000,000	531441000000,000
489,375	10	32937,891	2445958,740	191192641,754	15408543314,266	1266937543664,040
I	J	K	L	M	N	O
Хексп.=Хістн.	X0	X^2	X^3	X^4	X^5	X^6

Продовження розрахункової таблиці

0	0	0	8,9135511	4,744E-02	0,002250108
99,0626174	1114,454	12537,61251	8,9574206	-1,519E-01	0,023059834
200,326938	4507,356	101415,5123	8,801771	1,016E-01	0,010332412
290,845934	9816,05	331291,6965	8,5337384	8,392E-02	0,007042389
369,774551	16639,85	748793,466	8,2404589	-2,325E-02	0,000540407
443,329168	24937,27	1402721,196	8,0090687	-1,277E-01	0,016297411
537,30403	36268,02	2448091,487	7,9267041	3,336E-02	0,001112597
636,896769	50155,62	3949755,12	8,0805011	7,077E-03	5,00832E-05
707,533653	59698,15	5037031,573	8,2731902	1,124E-01	0,012632369
762,707642	68643,69	6177931,903	8,5575958	-8,307E-02	0,006900041
4047,781	271780,5	20209569,6	84,29	0,0000000	0,080218
P	Q	R	S	T	U
YX	YX^2	YX^3	Y'зрівн.	V=Yсптв.-Yз	VV

Додаток 4.

Розрахунок визначників

1266937543664,04	15408543314,27	191192642	2445959
15408543314,266	191192642	2445959	32937,891
191192641,754	2445959	32938	489
2445958,740	32938	489	10
D=	1,38204E+21		
20209569,5667	15408543314	191192642	2445959
271780,46372	191192642	2445959	32938
4047,7813032	2445959	32938	489
84,294000000	32938	489	10
D1=	1,40964E+16		
1266937543664	20209569,567	191192642	2445959
15408543314	271780,464	2445959	32938
191192642	4047,781	32938	489,375
2445959	84,2940	489,375	10
D2=	-1,5651E+18		
1266937543664	15408543314	20209570	2445958,7
15408543314	191192642	271780	32937,891
191192642	2445959	4048	489,375
2445959	32938	84,294	10
D3=	2,1213E+19		
1266937543664	15408543314	191192642	20209570
15408543314	191192642	2445959	271780
191192642	2445959	32938	4048
2445959	32938	489,375	84,294
D4=	1,2319E+22		

Додаток 5.

Вільні члени нормальних рівнянь

20209569,57
271780,464
4047,781
84,294

Додаток 6.

Розрахунок коефіцієнтів апроксимуючого поліному

a=D1/D=	0,000010200
b=D2/D=	-0,001132
c=D3/D=	0,015349
d=D4/D=	8,913551
Y=aX^3+bX^2+cX+d	

Нами виведена формула за результатами теоретичних досліджень:

$$y' = 0,000010200x^3 - 0,001132x^2 + 0,015349x + 8,913551.$$

Додаток 7.

Знаходження алгебраїчних доповнень

			1266937543664	15408543314	191192642
A44=	1,1858101,E+21		15408543314	191192642	2445959
			191192642	2445959	32938

			1266937543664	191192642	2445959
A22=	8,99382E+15		191192642	32938	489,375
			2445959	489	10

A33=	1,24719,E+19		1266937543664	15408543314	191192642
			15408543314	191192642	2445959
			2445959	32938	10

			191192642	2445959	32938
A11=	4,7761E+11		2445959	32938	489,375
			32937,891	489,375	10

Додаток 8.

Контроль зрівноваження

[yy]-	a[yx^3]-	b[yx^2]	- c[yx] -	d[y]	=	0,084049684
					[VV] =	0,084049684
					Різниця=	0,000000

Додаток 9.

Оцінка точності зрівноважених елементів

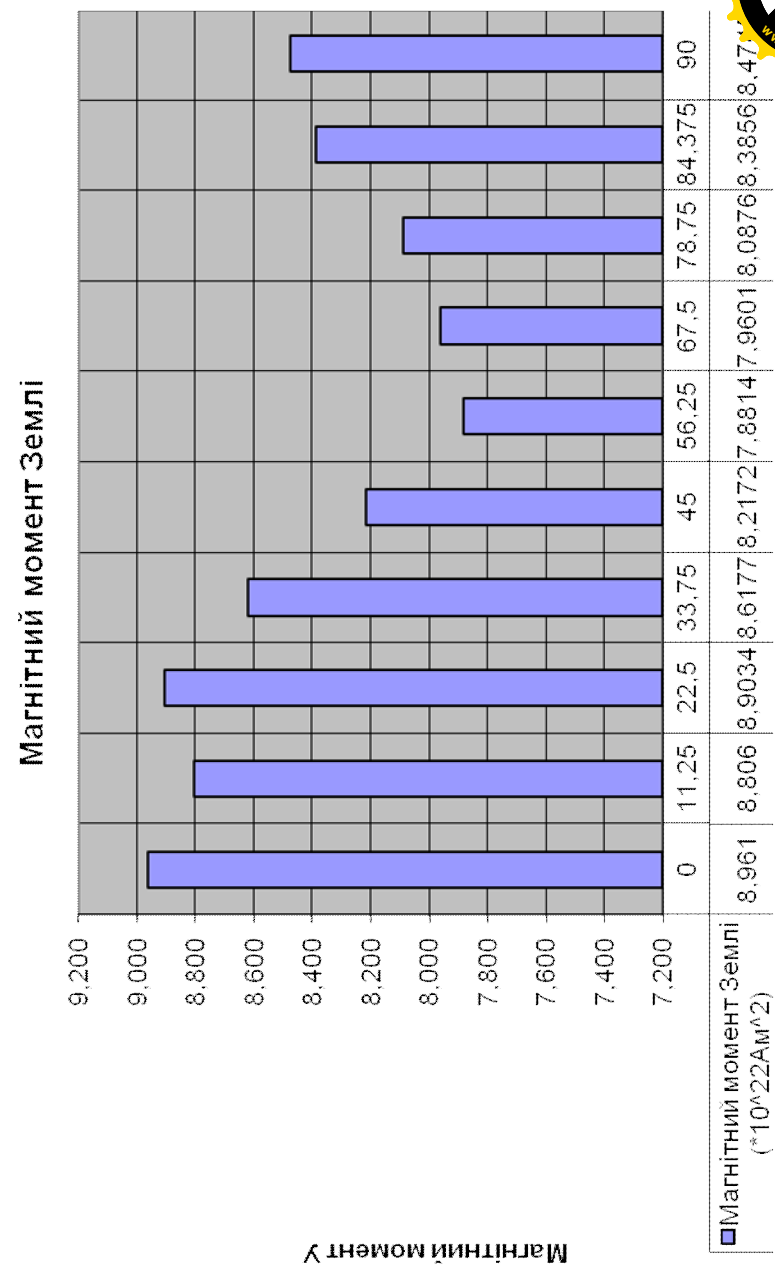
Середня квадратична похибка одиниці ваги	μ=	0,115627023
Середня квадратична похибка коефіцієнта а	ma=	2,14949E-06
Середня квадратична похибка коефіцієнта в	mb=	0,000294966
Середня квадратична похибка коефіцієнта с	mc=	0,010984158
Середня квадратична похибка коефіцієнта d	md=	0,107104381

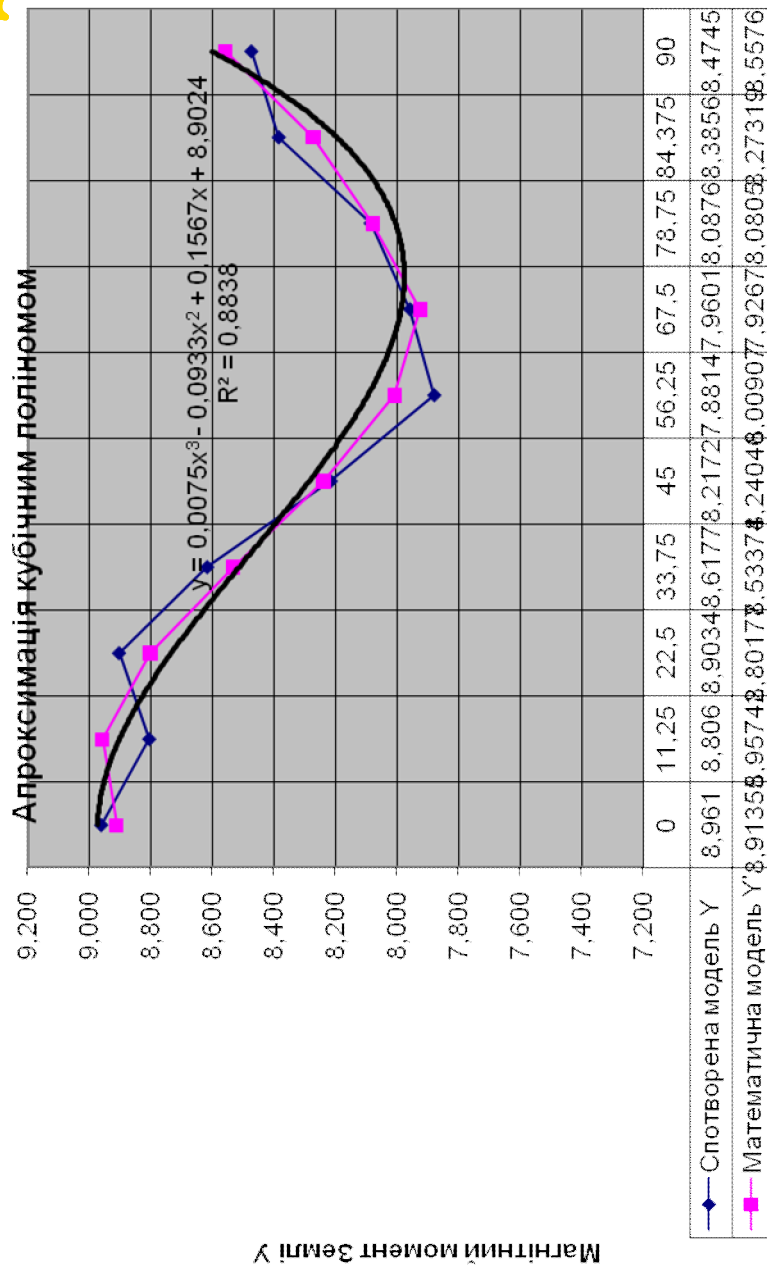
Середні квадратичні похибки зрівноваженої функції

$m\varphi =$

0,10710438
0,06623884
0,07039257
0,06467199
0,058428
0,06455843
0,06870054
0,05855716
0,0627905
0,09385587

Додаток 10. Діаграми досліджень

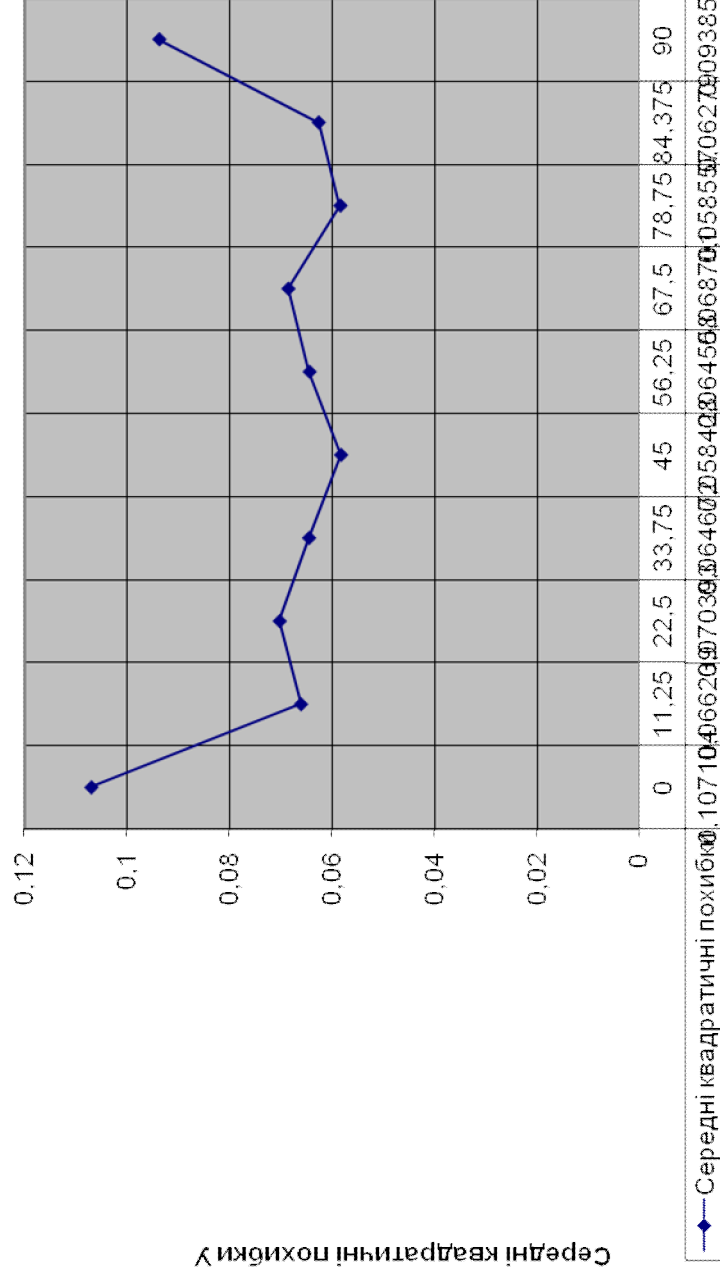




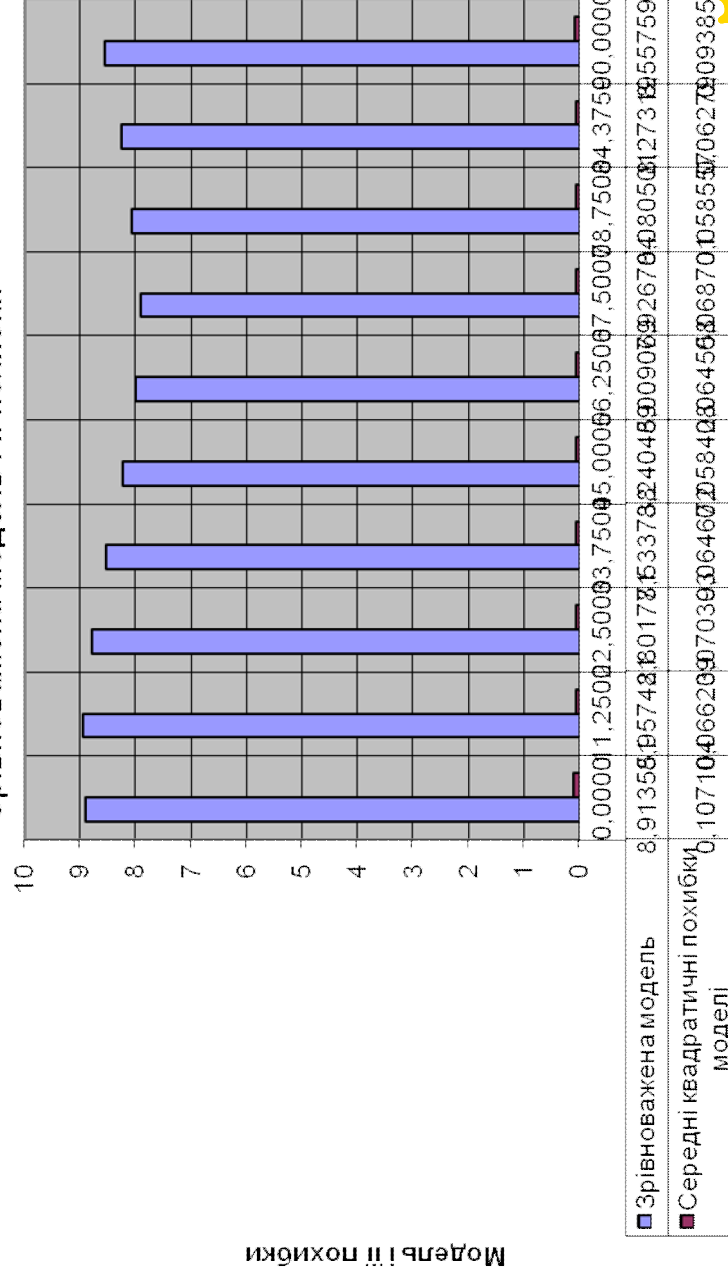
Обернені ваги



Середні квадратичні похибки

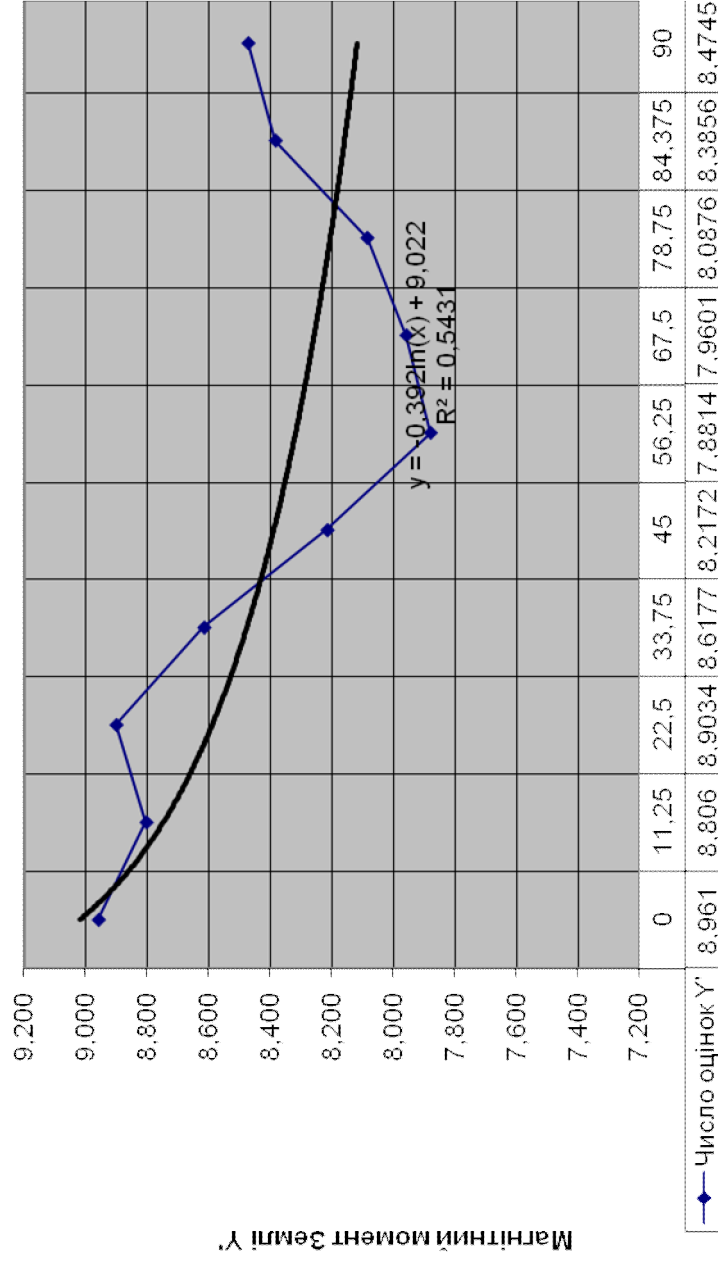


Зрівнювана модель і її похибки

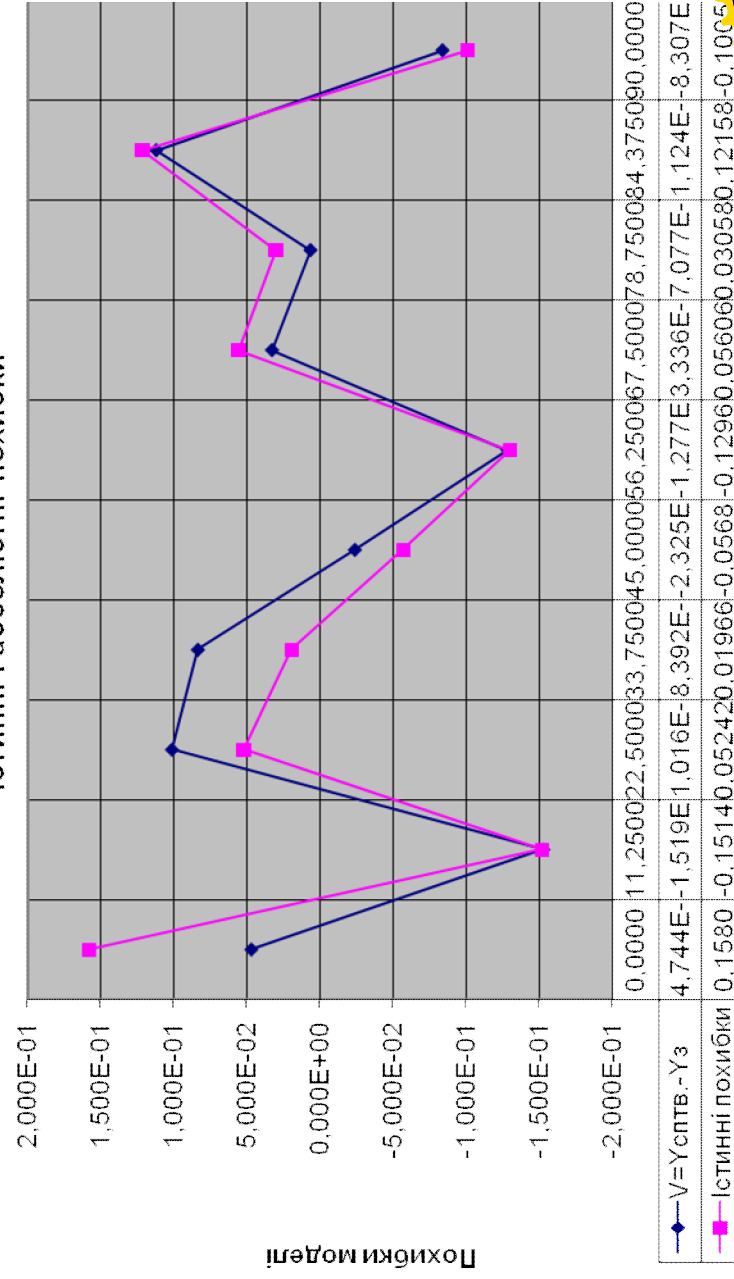


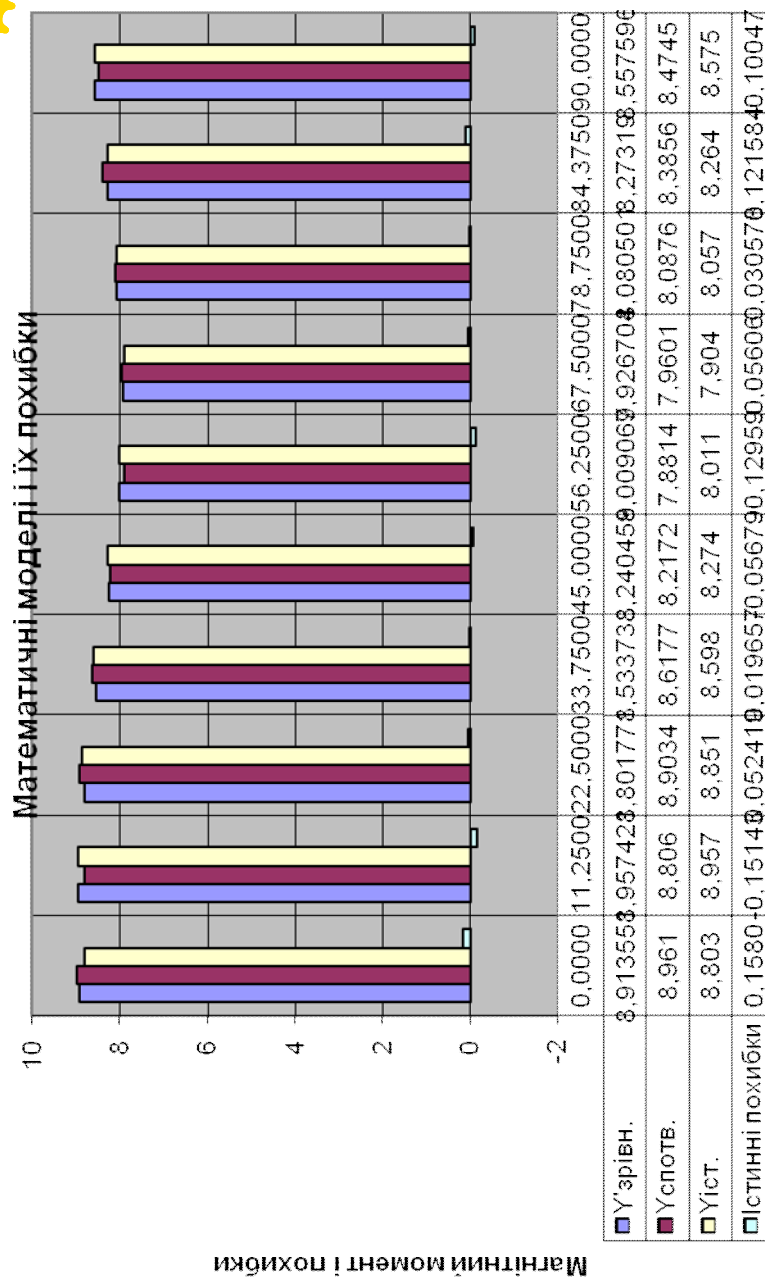


Апроксимация логарифмичною функцією



Істинні і абсолютні похибки





Додаток 11. Таблиці Валецького О.О.

Variant No./ Random values

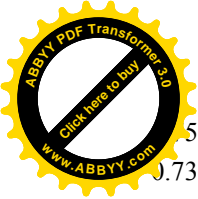
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
0.14	0.15	0.92	0.65	0.35	0.89	0.79	0.32	0.38	0.46	0.26	0.43	0.38	0.32	0.79	0.5
0.28	0.84	0.19	0.71	0.69	0.39	0.93	0.75	0.1	0.58	0.2	0.97	0.49	0.44	0.59	0.23
0.07	0.81	0.64	0.06	0.28	0.62	0.08	0.99	0.86	0.28	0.03	0.48	0.25	0.34	0.21	0.17
0.06	0.79	0.82	0.14	0.8	0.86	0.51	0.32	0.82	0.3	0.66	0.47	0.09	0.38	0.44	0.6
0.95	0.5	0.58	0.22	0.31	0.72	0.53	0.59	0.4	0.81	0.28	0.48	0.11	0.17	0.45	0.02
0.84	0.1	0.27	0.01	0.93	0.85	0.21	0.1	0.55	0.59	0.64	0.46	0.22	0.94	0.89	0.54
0.93	0.03	0.81	0.96	0.44	0.28	0.81	0.09	0.75	0.66	0.59	0.33	0.44	0.61	0.28	0.47
0.56	0.48	0.23	0.37	0.86	0.78	0.31	0.65	0.27	0.12	0.01	0.9	0.91	0.45	0.64	0.85
0.66	0.92	0.34	0.6	0.34	0.86	0.1	0.45	0.43	0.26	0.64	0.82	0.13	0.39	0.36	0.07
0.26	0.02	0.49	0.14	0.12	0.73	0.72	0.45	0.87	0	0.66	0.06	0.31	0.55	0.88	0.17

Variant No./ Random values

17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32
0.48	0.81	0.52	0.09	0.2	0.96	0.28	0.29	0.25	0.4	0.91	0.71	0.53	0.64	0.36	0.78
0.92	0.59	0.03	0.6	0.01	0.13	0.3	0.53	0.05	0.48	0.82	0.04	0.66	0.52	0.13	0.84
0.14	0.69	0.51	0.94	0.15	0.11	0.6	0.94	0.33	0.05	0.72	0.7	0.36	0.57	0.59	0.59
0.19	0.53	0.09	0.21	0.86	0.11	0.73	0.81	0.93	0.26	0.11	0.79	0.31	0.05	0.11	0.85
0.48	0.07	0.44	0.62	0.37	0.99	0.62	0.74	0.95	0.67	0.35	0.18	0.85	0.75	0.27	0.24
0.89	0.12	0.27	0.93	0.81	0.83	0.01	0.19	0.49	0.12	0.98	0.33	0.67	0.33	0.62	0.44
0.06	0.56	0.64	0.3	0.86	0.02	0.13	0.94	0.94	0.63	0.95	0.22	0.47	0.37	0.19	0.07
0.02	0.17	0.98	0.6	0.94	0.37	0.02	0.77	0.05	0.39	0.21	0.71	0.76	0.29	0.31	0.76
0.75	0.23	0.84	0.67	0.48	0.18	0.46	0.76	0.69	0.4	0.51	0.32	0	0.05	0.68	0.12
0.71	0.45	0.26	0.35	0.6	0.82	0.77	0.85	0.77	0.13	0.42	0.75	0.77	0.89	0.6	0.91

Variant No./ Random values

33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48
0.73	0.63	0.71	0.78	0.72	0.14	0.68	0.44	0.09	0.01	0.22	0.49	0.53	0.43	0.01	0.46
0.54	0.95	0.85	0.37	0.1	0.5	0.79	0.22	0.79	0.68	0.92	0.58	0.92	0.35	0.42	0.01
0.99	0.56	0.11	0.21	0.29	0.02	0.19	0.6	0.86	0.4	0.34	0.41	0.81	0.59	0.81	0.36
0.29	0.77	0.47	0.71	0.3	0.99	0.6	0.51	0.87	0.07	0.21	0.13	0.49	0.99	0.99	0.98
0.37	0.29	0.78	0.04	0.99	0.51	0.05	0.97	0.31	0.73	0.28	0.16	0.09	0.63	0.18	0.59
0.5	0.24	0.45	0.94	0.55	0.34	0.69	0.08	0.3	0.26	0.42	0.52	0.23	0.08	0.25	0.33
0.44	0.68	0.5	0.35	0.26	0.19	0.31	0.18	0.81	0.71	0.01	0	0.03	0.13	0.78	0.38



5 0.28 0.86 0.58 0.75 0.33 0.2 0.83 0.81 0.42 0.06 0.17 0.17 0.76 0.69 0.14
0.73 0.03 0.59 0.82 0.53 0.49 0.04 0.28 0.75 0.54 0.68 0.73 0.11 0.59 0.56 0.28
0.63 0.88 0.23 0.53 0.78 0.75 0.93 0.75 0.19 0.57 0.78 0.18 0.57 0.78 0.05 0.32

Variant No./ Random values

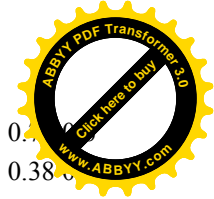
49 50 51 52 53 54 55 56 57 58 59 60 61 62 63 64
0.17 0.12 0.26 0.8 0.66 0.13 0 0.19 0.27 0.87 0.66 0.11 0.19 0.59 0.09 0.21
0.64 0.2 0.19 0.89 0.38 0.09 0.52 0.57 0.2 0.1 0.65 0.48 0.58 0.63 0.27 0.88
0.65 0.93 0.61 0.53 0.38 0.18 0.27 0.96 0.82 0.3 0.3 0.19 0.52 0.03 0.53 0.01
0.85 0.29 0.68 0.99 0.57 0.73 0.62 0.25 0.99 0.41 0.38 0.91 0.24 0.97 0.21 0.77
0.52 0.83 0.47 0.91 0.31 0.51 0.55 0.74 0.85 0.72 0.42 0.45 0.41 0.5 0.69 0.59
0.5 0.82 0.95 0.33 0.11 0.68 0.61 0.72 0.78 0.55 0.88 0.9 0.75 0.09 0.83 0.81
0.75 0.46 0.37 0.46 0.49 0.39 0.31 0.92 0.55 0.06 0.04 0 0.92 0.77 0.01 0.67
0.11 0.39 0 0.98 0.48 0.82 0.4 0.12 0.85 0.83 0.61 0.6 0.35 0.63 0.7 0.76
0.6 0.1 0.47 0.1 0.18 0.19 0.42 0.95 0.55 0.96 0.19 0.89 0.46 0.76 0.78 0.37
0.44 0.94 0.48 0.25 0.53 0.79 0.77 0.47 0.26 0.84 0.71 0.04 0.04 0.75 0.34 0.64

Variant No./ Random values

65 66 67 68 69 70 71 72 73 74 75 76 77 78 79 80
0.62 0.08 0.04 0.66 0.84 0.25 0.9 0.69 0.49 0.12 0.93 0.31 0.36 0.77 0.02 0.89
0.89 0.15 0.21 0.04 0.75 0.21 0.62 0.05 0.69 0.66 0.02 0.4 0.58 0.03 0.81 0.5
0.19 0.35 0.11 0.25 0.33 0.82 0.43 0 0.35 0.58 0.76 0.4 0.24 0.74 0.96 0.47
0.32 0.63 0.91 0.41 0.99 0.27 0.26 0.04 0.26 0.99 0.22 0.79 0.67 0.82 0.35 0.47
0.81 0.63 0.6 0.09 0.34 0.17 0.21 0.64 0.12 0.19 0.92 0.45 0.86 0.31 0.5 0.3
0.28 0.61 0.82 0.97 0.45 0.55 0.7 0.67 0.49 0.83 0.85 0.05 0.49 0.45 0.88 0.58
0.69 0.26 0.99 0.56 0.9 0.92 0.72 0.1 0.79 0.75 0.09 0.3 0.29 0.55 0.32 0.11
0.65 0.34 0.49 0.87 0.2 0.27 0.55 0.96 0.02 0.36 0.48 0.06 0.65 0.49 0.91 0.19
0.88 0.18 0.34 0.79 0.77 0.53 0.56 0.63 0.69 0.8 0.74 0.26 0.54 0.25 0.27 0.86
0.25 0.51 0.81 0.84 0.17 0.57 0.46 0.72 0.89 0.09 0.77 0.77 0.27 0.93 0.8 0

Variant No./ Random values

81 82 83 84 85 86 87 88 89 90 91 92 93 94 95 96
0.81 0.64 0.7 0.6 0.01 0.61 0.45 0.24 0.91 0.92 0.17 0.32 0.17 0.21 0.47 0.72
0.35 0.01 0.41 0.44 0.19 0.73 0.56 0.85 0.48 0.16 0.13 0.61 0.15 0.73 0.52 0.55
0.21 0.33 0.47 0.57 0.41 0.84 0.94 0.68 0.43 0.85 0.23 0.32 0.39 0.07 0.39 0.41
0.43 0.33 0.45 0.47 0.76 0.24 0.16 0.86 0.25 0.18 0.98 0.35 0.69 0.48 0.55 0.62
0.09 0.92 0.19 0.22 0.21 0.84 0.27 0.25 0.5 0.25 0.42 0.56 0.88 0.76 0.71 0.79



0.04 0.94 0.6 0.16 0.53 0.46 0.68 0.04 0.98 0.86 0.27 0.23 0.27 0.91 0
0.85 0.78 0.43 0.83 0.82 0.79 0.67 0.97 0.66 0.81 0.45 0.41 0 0.95 0.38
0.78 0.63 0.6 0.95 0.06 0.8 0.06 0.42 0.25 0.12 0.52 0.05 0.11 0.73 0.92 0.98
0.48 0.96 0.08 0.41 0.28 0.48 0.86 0.26 0.94 0.56 0.04 0.24 0.19 0.65 0.28 0.5
0.22 0.21 0.06 0.61 0.18 0.63 0.06 0.74 0.42 0.78 0.62 0.2 0.39 0.19 0.49 0.45

Variant No./ Random values

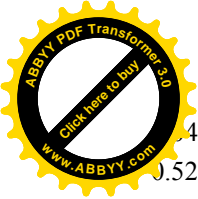
97 98 99 100 101 102 103 104 105 106 107 108 109 110 111 112
0.04 0.71 0.23 0.71 0.37 0.86 0.96 0.09 0.56 0.36 0.43 0.71 0.91 0.72 0.87 0.46
0.77 0.64 0.65 0.75 0.73 0.96 0.24 0.13 0.89 0.08 0.65 0.83 0.26 0.45 0.99 0.58
0.13 0.39 0.04 0.78 0.02 0.75 0.9 0.09 0.94 0.65 0.76 0.4 0.78 0.95 0.12 0.69
0.46 0.83 0.98 0.35 0.25 0.95 0.7 0.98 0.25 0.82 0.26 0.2 0.52 0.24 0.89 0.4
0.77 0.26 0.71 0.94 0.78 0.26 0.84 0.82 0.6 0.14 0.76 0.99 0.09 0.02 0.64 0.01
0.36 0.39 0.44 0.37 0.45 0.53 0.05 0.06 0.82 0.03 0.49 0.62 0.52 0.45 0.17 0.49
0.39 0.96 0.51 0.43 0.14 0.29 0.8 0.91 0.9 0.65 0.92 0.5 0.93 0.72 0.21 0.69
0.64 0.61 0.51 0.57 0.09 0.85 0.83 0.87 0.41 0.05 0.97 0.88 0.59 0.59 0.77 0.29
0.75 0.49 0.89 0.3 0.16 0.17 0.53 0.92 0.84 0.68 0.13 0.82 0.68 0.68 0.38 0.68
0.94 0.27 0.74 0.15 0.59 0.91 0.85 0.59 0.25 0.24 0.59 0.53 0.95 0.94 0.31 0.04

Variant No./ Random values

113 114 115 116 117 118 119 120 121 122 123 124 125 126 127 128
0.99 0.72 0.52 0.46 0.8 0.84 0.59 0.87 0.27 0.36 0.44 0.69 0.58 0.48 0.65 0.38
0.36 0.73 0.62 0.22 0.62 0.6 0.99 0.12 0.46 0.08 0.05 0.12 0.43 0.88 0.43 0.9
0.45 0.12 0.44 0.13 0.65 0.49 0.76 0.27 0.8 0.79 0.77 0.15 0.69 0.14 0.35 0.99
0.77 0 0.12 0.96 0.16 0.08 0.94 0.41 0.69 0.48 0.68 0.55 0.58 0.48 0.4 0.63
0.53 0.42 0.2 0.72 0.22 0.58 0.28 0.48 0.86 0.48 0.15 0.84 0.56 0.02 0.85 0.06
0.01 0.68 0.42 0.73 0.94 0.52 0.26 0.74 0.67 0.67 0.88 0.95 0.25 0.21 0.38 0.52
0.25 0.49 0.95 0.46 0.66 0.72 0.78 0.23 0.98 0.64 0.56 0.59 0.61 0.16 0.35 0.48
0.86 0.23 0.05 0.77 0.45 0.64 0.98 0.03 0.55 0.93 0.63 0.45 0.68 0.17 0.43 0.24
0.11 0.25 0.15 0.07 0.6 0.69 0.47 0.94 0.51 0.09 0.65 0.96 0.09 0.4 0.25 0.22
0.88 0.79 0.71 0.08 0.93 0.14 0.56 0.69 0.13 0.68 0.67 0.22 0.87 0.48 0.94 0.05

Variant No./ Random values

129 130 131 132 133 134 135 136 137 138 139 140 141 142 143 144
0.6 0.1 0.15 0.03 0.3 0.86 0.17 0.92 0.86 0.8 0.92 0.08 0.74 0.76 0.09 0.17
0.82 0.49 0.38 0.58 0.9 0.09 0.71 0.49 0.09 0.67 0.59 0.85 0.26 0.13 0.65 0.54
0.97 0.81 0.89 0.31 0.29 0.78 0.48 0.21 0.68 0.29 0.98 0.94 0.87 0.22 0.65 0.88



0.4 0.85 0.75 0.64 0.01 0.42 0.7 0.47 0.75 0.55 0.13 0.23 0.79 0.64 0.14 0.51
0.52 0.37 0.46 0.23 0.43 0.64 0.54 0.28 0.58 0.44 0.47 0.95 0.26 0.58 0.67 0.82
0.1 0.51 0.14 0.13 0.54 0.73 0.57 0.39 0.52 0.31 0.13 0.42 0.71 0.66 0.1 0.21
0.35 0.96 0.95 0.36 0.23 0.14 0.42 0.95 0.24 0.84 0.93 0.71 0.87 0.11 0.01 0.45
0.76 0.54 0.03 0.59 0.02 0.79 0.93 0.44 0.03 0.74 0.2 0.07 0.31 0.05 0.78 0.53
0.9 0.62 0.19 0.83 0.87 0.44 0.78 0.08 0.47 0.84 0.89 0.68 0.33 0.21 0.44 0.57
0.13 0.86 0.87 0.51 0.94 0.35 0.06 0.43 0.02 0.18 0.45 0.31 0.91 0.04 0.84 0.81

Variant No./ Random values

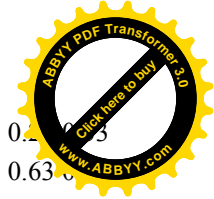
145 146 147 148 149 150 151 152 153 154 155 156 157 158 159 160
0 0.53 0.7 0.61 0.46 0.8 0.67 0.49 0.19 0.27 0.81 0.91 0.19 0.79 0.39 0.95
0.2 0.61 0.41 0.96 0.63 0.42 0.87 0.54 0.44 0.06 0.43 0.74 0.51 0.23 0.71 0.81
0.92 0.17 0.99 0.98 0.39 0.1 0.15 0.91 0.95 0.61 0.81 0.46 0.75 0.14 0.26 0.91
0.23 0.97 0.48 0.94 0.09 0.07 0.18 0.64 0.94 0.23 0.19 0.61 0.56 0.79 0.45 0.2
0.8 0.95 0.14 0.65 0.5 0.22 0.52 0.31 0.6 0.38 0.81 0.93 0.01 0.42 0.09 0.37
0.62 0.13 0.78 0.55 0.95 0.66 0.38 0.93 0.77 0.87 0.08 0.3 0.39 0.06 0.97 0.92
0.07 0.73 0.46 0.72 0.21 0.82 0.56 0.25 0.99 0.66 0.15 0.01 0.42 0.15 0.03 0.06
0.8 0.38 0.44 0.77 0.34 0.54 0.92 0.02 0.6 0.54 0.14 0.66 0.59 0.25 0.2 0.14
0.97 0.44 0.28 0.5 0.73 0.25 0.18 0.66 0.6 0.02 0.13 0.24 0.34 0.08 0.81 0.9
0.71 0.04 0.86 0.33 0.17 0.34 0.64 0.96 0.51 0.45 0.39 0.05 0.79 0.62 0.68 0.56

Variant No./ Random values

161 162 163 164 165 166 167 168 169 170 171 172 173 174 175 176
0.1 0.05 0.5 0.81 0.06 0.65 0.87 0.96 0.99 0.81 0.63 0.57 0.47 0.36 0.38 0.4
0.52 0.57 0.14 0.59 0.1 0.28 0.97 0.06 0.41 0.4 0.11 0.09 0.71 0.2 0.62 0.8
0.43 0.9 0.39 0.75 0.95 0.15 0.67 0.71 0.57 0.7 0.04 0.2 0.33 0.78 0.69 0.93
0.6 0.07 0.23 0.05 0.58 0.76 0.31 0.76 0.35 0.94 0.21 0.87 0.31 0.25 0.14 0.71
0.2 0.53 0.29 0.28 0.19 0.18 0.26 0.18 0.61 0.25 0.86 0.73 0.21 0.57 0.91 0.98
0.41 0.48 0.48 0.82 0.91 0.64 0.47 0.06 0.09 0.57 0.52 0.7 0.69 0.57 0.22 0.09
0.17 0.56 0.71 0.16 0.72 0.29 0.1 0.98 0.16 0.9 0.91 0.52 0.8 0.17 0.35 0.06
0.71 0.27 0.48 0.58 0.32 0.22 0.87 0.18 0.35 0.2 0.93 0.53 0.96 0.57 0.25 0.12
0.1 0.83 0.57 0.91 0.51 0.36 0.98 0.82 0.09 0.14 0.44 0.21 0 0.67 0.51 0.03
0.34 0.67 0.11 0.03 0.14 0.12 0.67 0.11 0.13 0.69 0.9 0.86 0.58 0.51 0.63 0.98

Variant No./ Random values

177 178 179 180 181 182 183 184 185 186 187 188 189 190 191 192
0.31 0.5 0.19 0.7 0.16 0.51 0.51 0.16 0.85 0.17 0.14 0.37 0.65 0.76 0.18 0.35



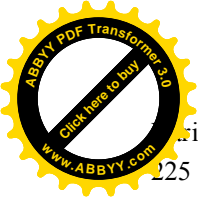
0.15 0.56 0.5 0.88 0.49 0.09 0.98 0.98 0.59 0.98 0.23 0.87 0.34 0.55 0.2
0.16 0.35 0.5 0.76 0.47 0.91 0.85 0.35 0.89 0.32 0.26 0.18 0.54 0.89 0.63
0.32 0.93 0.3 0.89 0.85 0.7 0.64 0.2 0.46 0.75 0.25 0.9 0.7 0.91 0.54 0.81
0.41 0.65 0.49 0.85 0.94 0.61 0.63 0.71 0.8 0.27 0.09 0.81 0.99 0.43 0.09 0.92
0.44 0.88 0.95 0.75 0.71 0.28 0.28 0.9 0.59 0.23 0.23 0.32 0.6 0.97 0.29 0.97
0.12 0.08 0.44 0.33 0.57 0.32 0.65 0.48 0.93 0.82 0.39 0.11 0.93 0.25 0.97 0.46
0.36 0.67 0.3 0.58 0.36 0.04 0.14 0.28 0.13 0.88 0.3 0.32 0.03 0.82 0.49 0.03
0.75 0.89 0.85 0.24 0.37 0.44 0.17 0.02 0.91 0.32 0.76 0.56 0.18 0.09 0.37 0.73
0.44 0.4 0.3 0.7 0.74 0.69 0.21 0.12 0.01 0.91 0.3 0.2 0.33 0.03 0.8 0.19

Variant No./ Random values

193 194 195 196 197 198 199 200 201 202 203 204 205 206 207 208
0.76 0.21 0.1 0.11 0 0.44 0.92 0.93 0.21 0.51 0.6 0.84 0.24 0.44 0.85 0.96
0.37 0.66 0.98 0.38 0.95 0.22 0.86 0.84 0.78 0.31 0.23 0.55 0.26 0.58 0.21 0.31
0.44 0.95 0.76 0.85 0.72 0.62 0.43 0.34 0.41 0.89 0.3 0.39 0.68 0.64 0.26 0.24
0.34 0.1 0.77 0.32 0.26 0.97 0.8 0.28 0.07 0.31 0.89 0.15 0.44 0.11 0.01 0.04
0.46 0.82 0.32 0.52 0.71 0.62 0.01 0.05 0.26 0.52 0.27 0.21 0.11 0.66 0.03 0.96
0.66 0.55 0.73 0.09 0.25 0.47 0.11 0.05 0.57 0.85 0.37 0.63 0.46 0.68 0.2 0.65
0.31 0.09 0.89 0.65 0.26 0.91 0.86 0.2 0.56 0.47 0.69 0.31 0.25 0.7 0.58 0.63
0.56 0.62 0.01 0.85 0.58 0.1 0.07 0.29 0.36 0.06 0.59 0.87 0.64 0.86 0.11 0.79
0.1 0.45 0.33 0.48 0.85 0.03 0.46 0.11 0.36 0.57 0.68 0.67 0.53 0.24 0.94 0.41
0.66 0.8 0.39 0.62 0.65 0.79 0.78 0.77 0.18 0.55 0.6 0.84 0.55 0.29 0.65 0.41

Variant No./ Random values

209 210 211 212 213 214 215 216 217 218 219 220 221 222 223 224
0.26 0.65 0.4 0.85 0.3 0.61 0.43 0.44 0.43 0.18 0.58 0.67 0.69 0.75 0.14 0.56
0.61 0.4 0.68 0 0.7 0.02 0.37 0.87 0.76 0.59 0.13 0.44 0.01 0.71 0.27 0.49
0.47 0.04 0.2 0.56 0.22 0.3 0.53 0.89 0.94 0.56 0.13 0.14 0.07 0.11 0.27 0
0.04 0.07 0.85 0.47 0.33 0.26 0.99 0.39 0.08 0.14 0.54 0.66 0.46 0.45 0.88 0.07
0.97 0.27 0.08 0.26 0.68 0.3 0.63 0.43 0.28 0.58 0.78 0.56 0.98 0.3 0.52 0.35
0.8 0.89 0.33 0.06 0.57 0.57 0.4 0.67 0.95 0.45 0.71 0.63 0.77 0.52 0.54 0.2
0.21 0.14 0.95 0.57 0.61 0.58 0.14 0 0.25 0.01 0.26 0.22 0.85 0.94 0.13 0.02
0.16 0.47 0.15 0.5 0.97 0.92 0.59 0.23 0.09 0.9 0.79 0.65 0.47 0.37 0.61 0.25
0.51 0.76 0.56 0.75 0.13 0.57 0.51 0.78 0.29 0.66 0.64 0.54 0.77 0.91 0.74 0.5
0.11 0.29 0.96 0.14 0.89 0.03 0.04 0.63 0.99 0.47 0.13 0.29 0.62 0.1 0.73 0.4



Variant No./ Random values

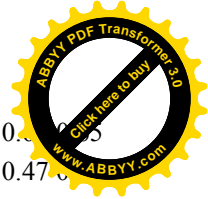
225 226 227 228 229 230 231 232 233 234 235 236 237 238 239 240
0.43 0.75 0.18 0.95 0.73 0.59 0.61 0.45 0.89 0.01 0.93 0.89 0.71 0.31 0.11 0.79
0.04 0.29 0.78 0.28 0.56 0.47 0.5 0.32 0.03 0.19 0.86 0.91 0.51 0.4 0.28 0.7
0.8 0.85 0.99 0.04 0.8 0.1 0.94 0.12 0.14 0.72 0.21 0.31 0.79 0.47 0.64 0.77
0.72 0.62 0.24 0.14 0.25 0.48 0.54 0.54 0.03 0.32 0.15 0.71 0.85 0.3 0.61 0.42
0.28 0.81 0.37 0.58 0.5 0.43 0.06 0.33 0.21 0.75 0.18 0.29 0.79 0.86 0.62 0.23
0.71 0.72 0.15 0.91 0.6 0.77 0.16 0.69 0.25 0.47 0.48 0.73 0.89 0.86 0.65 0.49
0.49 0.45 0.01 0.14 0.65 0.4 0.62 0.84 0.33 0.66 0.39 0.37 0.9 0.03 0.97 0.69
0.26 0.56 0.72 0.14 0.63 0.85 0.3 0.67 0.36 0.09 0.65 0.71 0.2 0.91 0.8 0.76
0.38 0.32 0.71 0.66 0.41 0.62 0.74 0.88 0.88 0 0.78 0.69 0.25 0.6 0.29 0.02
0.28 0.47 0.21 0.04 0.03 0.17 0.21 0.18 0.6 0.82 0.04 0.19 0 0.04 0.22 0.96

Variant No./ Random values

241 242 243 244 245 246 247 248 249 250 251 252 253 254 255 256
0.61 0.71 0.19 0.63 0.77 0.92 0.13 0.37 0.57 0.51 0.14 0.95 0.95 0.01 0.56 0.6
0.49 0.63 0.18 0.62 0.94 0.72 0.65 0.47 0.36 0.42 0.52 0.3 0.81 0.77 0.03 0.67
0.51 0.59 0.06 0.73 0.5 0.23 0.5 0.72 0.83 0.54 0.05 0.67 0.04 0.03 0.86 0.74
0.35 0.13 0.62 0.22 0.24 0.77 0.15 0.89 0.15 0.04 0.95 0.3 0.98 0.44 0.48 0.93
0.33 0.09 0.63 0.4 0.87 0.8 0.76 0.93 0.25 0.99 0.39 0.78 0.05 0.41 0.93 0.41
0.44 0.73 0.77 0.44 0.18 0.42 0.63 0.12 0.98 0.6 0.8 0.99 0.88 0.86 0.87 0.41
0.32 0.6 0.47 0.21 0.56 0.95 0.16 0.23 0.96 0.58 0.64 0.57 0.3 0.21 0.63 0.15
0.98 0.19 0.31 0.95 0.16 0.73 0.53 0.81 0.29 0.74 0.16 0.77 0.29 0.47 0.86 0.72
0.42 0.29 0.24 0.65 0.43 0.66 0.8 0.09 0.8 0.67 0.69 0.28 0.23 0.82 0.8 0.68
0.99 0.64 0 0.48 0.24 0.35 0.4 0.37 0.01 0.41 0.63 0.14 0.96 0.58 0.97 0.94

Variant No./ Random values

257 258 259 260 261 262 263 264 265 266 267 268 269 270 271 272
0.09 0.24 0.32 0.37 0.89 0.69 0.07 0.06 0.97 0.79 0.42 0.23 0.62 0.5 0.82 0.21
0.68 0.89 0.57 0.38 0.37 0.98 0.62 0.3 0.01 0.59 0.37 0.76 0.47 0.16 0.51 0.22
0.89 0.35 0.78 0.6 0.15 0.88 0.16 0.17 0.55 0.78 0.29 0.73 0.52 0.33 0.44 0.6
0.42 0.81 0.51 0.26 0.27 0.2 0.37 0.34 0.31 0.46 0.53 0.19 0.77 0.77 0.41 0.6
0.31 0.99 0.06 0.65 0.54 0.18 0.76 0.39 0.79 0.29 0.33 0.44 0.19 0.52 0.15 0.41
0.34 0.18 0.99 0.48 0.54 0.44 0.73 0.45 0.67 0.38 0.31 0.62 0.49 0.93 0.41 0.91
0.31 0.81 0.48 0.09 0.27 0.77 0.71 0.03 0.86 0.38 0.77 0.34 0.31 0.77 0.2 0.75
0.45 0.65 0.45 0.32 0.2 0.77 0.7 0.92 0.12 0.01 0.9 0.51 0.66 0.09 0.62 0.8



0.49 0.09 0.26 0.36 0.01 0.97 0.59 0.88 0.28 0.16 0.13 0.32 0.31 0.66 0.0
0.28 0.61 0.93 0.26 0.68 0.63 0.36 0.06 0.27 0.35 0.67 0.63 0.03 0.54 0.47

Variant No./ Random values

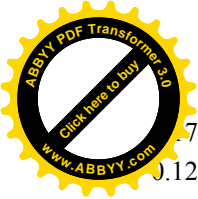
273 274 275 276 277 278 279 280 281 282 283 284 285 286 287 288
0.28 0.03 0.5 0.45 0.07 0.77 0.23 0.55 0.47 0.1 0.58 0.59 0.54 0.87 0.02 0.79
0.08 0.14 0.35 0.62 0.4 0.14 0.51 0.71 0.8 0.62 0.46 0.43 0.62 0.67 0.94 0.56
0.12 0.75 0.31 0.81 0.34 0.07 0.83 0.3 0.33 0.62 0.54 0.23 0.27 0.83 0.94 0.49
0.75 0.38 0.24 0.37 0.2 0.58 0.35 0.31 0.14 0.77 0.11 0.99 0.26 0.06 0.38 0.13
0.34 0.67 0.76 0.87 0.96 0.95 0.97 0.03 0.09 0.83 0.39 0.13 0.07 0.71 0.09 0.87
0.04 0.08 0.59 0.13 0.37 0.46 0.41 0.44 0.28 0.22 0.77 0.26 0.34 0.65 0.94 0.7
0.47 0.45 0.87 0.84 0.77 0.87 0.2 0.19 0.27 0.71 0.52 0.8 0.73 0.17 0.67 0.9
0.77 0.07 0.15 0.72 0.13 0.44 0.47 0.3 0.6 0.57 0 0.73 0.34 0.92 0.43 0.69
0.31 0.13 0.83 0.5 0.49 0.31 0.63 0.12 0.84 0.04 0.25 0.12 0.19 0.25 0.65 0.17
0.98 0.06 0.94 0.11 0.35 0.28 0.01 0.31 0.47 0.01 0.3 0.47 0.81 0.64 0.37 0.88

Variant No./ Random values

289 290 291 292 293 294 295 296 297 298 299 300 301 302 303 304
0.51 0.85 0.29 0.09 0.28 0.54 0.52 0.01 0.16 0.58 0.39 0.34 0.19 0.65 0.62 0.13
0.49 0.14 0.34 0.15 0.95 0.62 0.58 0.65 0.86 0.55 0.7 0.55 0.26 0.9 0.49 0.65
0.2 0.98 0.58 0.03 0.38 0.5 0.72 0.24 0.26 0.48 0.29 0.39 0.72 0.85 0.84 0.78
0.31 0.63 0.05 0.77 0.77 0.56 0.06 0.88 0.87 0.64 0.46 0.24 0.82 0.46 0.85 0.79
0.26 0.03 0.95 0.35 0.27 0.73 0.48 0.03 0.04 0.8 0.29 0 0.58 0.76 0.07 0.58
0.25 0.1 0.47 0.47 0.09 0.16 0.43 0.96 0.13 0.62 0.67 0.6 0.44 0.92 0.56 0.27
0.42 0.04 0.2 0.83 0.2 0.85 0.66 0.11 0.9 0.62 0.54 0.54 0.33 0.72 0.13 0.15
0.35 0.95 0.84 0.5 0.68 0.77 0.24 0.6 0.29 0.01 0.61 0.87 0.66 0.79 0.52 0.4
0.61 0.63 0.42 0.52 0.25 0.77 0.19 0.54 0.29 0.16 0.29 0.91 0.93 0.06 0.45 0.53
0.77 0.99 0.14 0.03 0.73 0.4 0.43 0.28 0.75 0.26 0.28 0.88 0.96 0.39 0.95 0.87

Variant No./ Random values

305 306 307 308 309 310 311 312 313 314 315 316 317 318 319 320
0.94 0.75 0.72 0.91 0.74 0.64 0.26 0.35 0.74 0.55 0.25 0.4 0.79 0.09 0.14 0.51
0.35 0.71 0.11 0.36 0.94 0.1 0.91 0.19 0.39 0.32 0.51 0.91 0.07 0.6 0.2 0.82
0.52 0.02 0.61 0.87 0.98 0.53 0.18 0.87 0.7 0.58 0.42 0.97 0.25 0.91 0.67 0.78
0.13 0.14 0.96 0.99 0 0.9 0.19 0.21 0.16 0.97 0.17 0.37 0.27 0.84 0.76 0.84
0.72 0.68 0.6 0.84 0.9 0.03 0.37 0.7 0.24 0.24 0.29 0.16 0.51 0.3 0.05 0
0.51 0.68 0.32 0.33 0.64 0.35 0.03 0.89 0.51 0.7 0.29 0.89 0.39 0.22 0.33 0.45



7 0.22 0.01 0.38 0.12 0.8 0.69 0.65 0.01 0.17 0.84 0.4 0.87 0.45 0.19 0.6
0.12 0.12 0.28 0.59 0.93 0.71 0.62 0.31 0.3 0.17 0.11 0.44 0.48 0.46 0.4 0.9
0.38 0.9 0.64 0.49 0.54 0.44 0 0.61 0.98 0.69 0.07 0.54 0.85 0.16 0.02 0.63
0.27 0.5 0.52 0.98 0.34 0.91 0.87 0.4 0.78 0.66 0.8 0.88 0.18 0.33 0.85 0.1

Variant No./ Random values

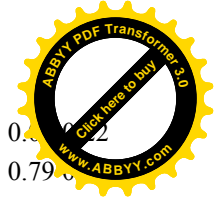
321 322 323 324 325 326 327 328 329 330 331 332 333 334 335 336
0.22 0.83 0.34 0.5 0.85 0.04 0.86 0.08 0.25 0.03 0.93 0.02 0.13 0.32 0.19 0.71
0.55 0.18 0.43 0.06 0.35 0.45 0.5 0.07 0.66 0.82 0.82 0.94 0.93 0.04 0.13 0.77
0.65 0.52 0.79 0.39 0.75 0.17 0.54 0.61 0.39 0.53 0.98 0.46 0.83 0.39 0.36 0.38
0.3 0.47 0.46 0.11 0.99 0.66 0.53 0.85 0.81 0.53 0.84 0.2 0.56 0.85 0.33 0.86
0.21 0.86 0.72 0.52 0.33 0.4 0.28 0.3 0.87 0.11 0.23 0.28 0.27 0.89 0.21 0.25
0.07 0.71 0.26 0.29 0.46 0.32 0.29 0.56 0.39 0.89 0.89 0.89 0.35 0.82 0.11 0.67
0.45 0.62 0.7 0.1 0.21 0.83 0.56 0.46 0.22 0.01 0.34 0.96 0.71 0.51 0.88 0.19
0.09 0.73 0.03 0.81 0.19 0.8 0.04 0.97 0.34 0.07 0.23 0.96 0.1 0.36 0.85 0.4
0.66 0.43 0.19 0.39 0.5 0.97 0.9 0.19 0.06 0.99 0.63 0.95 0.52 0.45 0.3 0.05
0.45 0.05 0.8 0.68 0.55 0.01 0.95 0.67 0.3 0.22 0.92 0.19 0.13 0.93 0.39 0.18

Variant No./ Random values

337 338 339 340 341 342 343 344 345 346 347 348 349 350 351 352
0.56 0.8 0.34 0.49 0.03 0.98 0.2 0.59 0.55 0.1 0.02 0.26 0.35 0.35 0.36 0.19
0.2 0.41 0.99 0.47 0.45 0.53 0.85 0.93 0.81 0.02 0.34 0.39 0.55 0.44 0.95 0.97
0.78 0.37 0.79 0.02 0.37 0.42 0.16 0.17 0.27 0.11 0.17 0.23 0.64 0.34 0.35 0.43
0.94 0.78 0.22 0.18 0.18 0.52 0.86 0.24 0.08 0.51 0.4 0.06 0.66 0.04 0.43 0.32
0.58 0.88 0.56 0.98 0.67 0.05 0.43 0.15 0.47 0.06 0.96 0.57 0.47 0.45 0.85 0.5
0.33 0.23 0.23 0.34 0.21 0.07 0.3 0.15 0.45 0.94 0.05 0.16 0.55 0.37 0.9 0.68
0.66 0.27 0.33 0.37 0.99 0.58 0.51 0.15 0.62 0.57 0.84 0.32 0.29 0.88 0.27 0.37
0.23 0.19 0.89 0.87 0.57 0.14 0.15 0.95 0.78 0.11 0.19 0.63 0.58 0.33 0 0.59
0.4 0.87 0.3 0.68 0.12 0.16 0.02 0.87 0.64 0.96 0.28 0.67 0.44 0.6 0.47 0.74
0.64 0.91 0.59 0.95 0.05 0.49 0.73 0.74 0.25 0.62 0.69 0.01 0.04 0.9 0.37 0.78

Variant No./ Random values

353 354 355 356 357 358 359 360 361 362 363 364 365 366 367 368
0.19 0.86 0.83 0.59 0.38 0.14 0.65 0.74 0.12 0.68 0.04 0.92 0.56 0.48 0.79 0.85
0.56 0.14 0.53 0.72 0.34 0.78 0.67 0.33 0.03 0.9 0.46 0.88 0.38 0.34 0.36 0.34
0.65 0.53 0.79 0.49 0.86 0.41 0.92 0.7 0.56 0.38 0.72 0.93 0.17 0.48 0.72 0.33
0.2 0.83 0.76 0.01 0.12 0.3 0.29 0.91 0.13 0.67 0.93 0.86 0.27 0.08 0.94 0.38



0.79 0.93 0.62 0.01 0.62 0.95 0.15 0.41 0.33 0.71 0.42 0.48 0.92 0.83 0.1
0.01 0.26 0.9 0.14 0.75 0.46 0.68 0.47 0.65 0.35 0.76 0.16 0.47 0.73 0.79
0.75 0.2 0.04 0.9 0.75 0.71 0.55 0.52 0.78 0.19 0.65 0.36 0.21 0.32 0.39 0.26
0.4 0.61 0.6 0.13 0.63 0.58 0.15 0.59 0.07 0.42 0.2 0.2 0.2 0.31 0.87 0.27
0.76 0.05 0.27 0.72 0.19 0 0.55 0.61 0.48 0.42 0.55 0.51 0.87 0.92 0.53 0.03
0.43 0.51 0.39 0.84 0.42 0.53 0.22 0.34 0.15 0.76 0.23 0.36 0.1 0.64 0.25 0.06

Variant No./ Random values

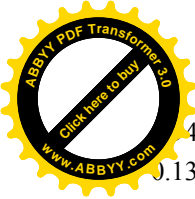
369 370 371 372 373 374 375 376 377 378 379 380 381 382 383 384
0.39 0.04 0.97 0.5 0.08 0.65 0.62 0.71 0.09 0.53 0.59 0.19 0.46 0.58 0.97 0.51
0.41 0.31 0.03 0.48 0.22 0.76 0.93 0.06 0.24 0.74 0.35 0.36 0.32 0.56 0.91 0.6
0.78 0.15 0.47 0.81 0.81 0.15 0.28 0.43 0.66 0.79 0.57 0.06 0.11 0.08 0.61 0.53
0.31 0.5 0.44 0.52 0.12 0.74 0.73 0.92 0.45 0.44 0.94 0.54 0.23 0.68 0.28 0.86
0.06 0.13 0.4 0.84 0.14 0.86 0.37 0.76 0.7 0.09 0.61 0.2 0.71 0.51 0.24 0.91
0.4 0.43 0.02 0.72 0.53 0.86 0.07 0.64 0.82 0.36 0.34 0.14 0.33 0.46 0.23 0.51
0.89 0.75 0.76 0.64 0.52 0.16 0.41 0.37 0.67 0.96 0.9 0.31 0.49 0.5 0.19 0.1
0.85 0.75 0.98 0.44 0.23 0.91 0.98 0.62 0.91 0.64 0.21 0.93 0.99 0.49 0.07 0.23
0.62 0.34 0.64 0.68 0.44 0.11 0.73 0.94 0.03 0.26 0.59 0.18 0.4 0.44 0.37 0.8
0.51 0.33 0.38 0.94 0.52 0.57 0.42 0.39 0.95 0.08 0.29 0.65 0.91 0.22 0.85 0.08

Variant No./ Random values

385 386 387 388 389 390 391 392 393 394 395 396 397 398 399 400
0.55 0.58 0.21 0.57 0.25 0.03 0.1 0.71 0.25 0.7 0.12 0.66 0.83 0.02 0.4 0.29
0.29 0.52 0.52 0.2 0.11 0.87 0.26 0.76 0.75 0.62 0.2 0.41 0.54 0.2 0.51 0.61
0.84 0.16 0.34 0.84 0.75 0.65 0.16 0.99 0.98 0.11 0.61 0.41 0.01 0 0.29 0.96
0.07 0.83 0.86 0.9 0.92 0.91 0.6 0.3 0.28 0.84 0 0.26 0.91 0.04 0.14 0.07
0.92 0.88 0.62 0.15 0.07 0.84 0.24 0.51 0.67 0.09 0.08 0.7 0 0.69 0.92 0.82
0.12 0.06 0.6 0.41 0.83 0.71 0.8 0.65 0.35 0.56 0.72 0.52 0.53 0.25 0.67 0.53
0.28 0.61 0.29 0.1 0.42 0.48 0.77 0.61 0.82 0.58 0.29 0.76 0.51 0.57 0.95 0.98
0.47 0.03 0.56 0.22 0.26 0.29 0.34 0.86 0 0.34 0.15 0.87 0.22 0.98 0.05 0.34
0.98 0.96 0.5 0.22 0.62 0.91 0.74 0.87 0.88 0.2 0.27 0.34 0.2 0.92 0.22 0.24
0.53 0.39 0.85 0.62 0.64 0.76 0.69 0.14 0.9 0.55 0.62 0.84 0.25 0.03 0.91 0.27

Variant No./ Random values

401 402 403 404 405 406 407 408 409 410 411 412 413 414 415 416
0.57 0.71 0.02 0.84 0.02 0.79 0.98 0.06 0.63 0.65 0.82 0.54 0.88 0.92 0.64 0.88
0.02 0.54 0.56 0.61 0.01 0.72 0.96 0.7 0.26 0.64 0.07 0.65 0.59 0.04 0.29 0.09



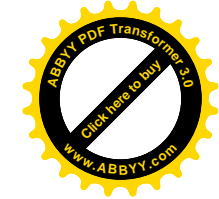
4 0.56 0.81 0.5 0.65 0.26 0.53 0.05 0.37 0.18 0.29 0.41 0.27 0.03 0.36 0.93
0.13 0.78 0.51 0.78 0.6 0.9 0.4 0.7 0.86 0.67 0.11 0.49 0.65 0.58 0.34 0.34
0.34 0.76 0.93 0.38 0.57 0.81 0.71 0.13 0.86 0.45 0.58 0.73 0.67 0.81 0.23 0.01
0.45 0.87 0.68 0.71 0.26 0.6 0.34 0.89 0.13 0.9 0.95 0.62 0 0.99 0.39 0.36
0.1 0.31 0.02 0.91 0.61 0.61 0.52 0.88 0.13 0.84 0.37 0.9 0.99 0.04 0.23 0.17
0.47 0.33 0.63 0.94 0.8 0.45 0.75 0.93 0.14 0.93 0.14 0.05 0.29 0.76 0.34 0.75
0.74 0.81 0.19 0.35 0.67 0.09 0.11 0.01 0.37 0.75 0.17 0.21 0 0.8 0.31 0.55
0.9 0.24 0.85 0.3 0.9 0.66 0.92 0.03 0.76 0.71 0.92 0.2 0.33 0.22 0.9 0.94

Variant No./ Random values

417 418 419 420 421 422 423 424 425 426 427 428 429 430 431 432
0.33 0.46 0.76 0.85 0.14 0.22 0.14 0.47 0.73 0.79 0.39 0.37 0.51 0.7 0.34 0.43
0.66 0.19 0.91 0.04 0.03 0.37 0.51 0.11 0.73 0.54 0.71 0.91 0.85 0.5 0.46 0.44
0.9 0.26 0.36 0.55 0.12 0.81 0.62 0.28 0.82 0.44 0.62 0.57 0.59 0.16 0.33 0.3
0.39 0.1 0.72 0.25 0.38 0.37 0.42 0.18 0.21 0.4 0.88 0.35 0.08 0.65 0.73 0.91
0.77 0.15 0.09 0.68 0.28 0.87 0.47 0.82 0.65 0.69 0.95 0.99 0.57 0.44 0.9 0.66
0.17 0.58 0.34 0.41 0.37 0.52 0.23 0.97 0.09 0.68 0.34 0.08 0 0.53 0.55 0.98
0.49 0.17 0.54 0.17 0.38 0.18 0.83 0.99 0.94 0.46 0.97 0.48 0.67 0.62 0.65 0.51
0.65 0.82 0.76 0.58 0.48 0.35 0.88 0.45 0.31 0.42 0.77 0.56 0.87 0.9 0.02 0.9
0.95 0.17 0.02 0.83 0.52 0.97 0.16 0.34 0.45 0.62 0.12 0.96 0.4 0.43 0.52 0.31
0.17 0.6 0.06 0.65 0.1 0.12 0.41 0.2 0.06 0.59 0.75 0.58 0.51 0.27 0.61 0.78

Variant No./ Random values

433 434 435 436 437 438 439 440 441 442 443 444 445 446 447 448
0.58 0.38 0.29 0.2 0.41 0.97 0.48 0.44 0.23 0.6 0.8 0.07 0.19 0.3 0.45 0.76
0.18 0.93 0.23 0.49 0.22 0.92 0.79 0.65 0.01 0.98 0.75 0.18 0.72 0.12 0.72 0.67
0.5 0.79 0.81 0.25 0.54 0.7 0.95 0.89 0.04 0.55 0.63 0.57 0.92 0.12 0.21 0.03
0.33 0.46 0.69 0.74 0.99 0.23 0.56 0.3 0.25 0.49 0.47 0.8 0.24 0.9 0.11 0.41
0.95 0.21 0.23 0.82 0.81 0.53 0.09 0.11 0.4 0.79 0.07 0.38 0.6 0.25 0.15 0.22
0.74 0.29 0.95 0.81 0.8 0.72 0.47 0.16 0.25 0.91 0.66 0.85 0.45 0.13 0.33 0.12
0.39 0.48 0.04 0.94 0.7 0.79 0.11 0.91 0.53 0.26 0.73 0.43 0.02 0.82 0.44 0.18
0.6 0.41 0.42 0.63 0.63 0.95 0.48 0 0.04 0.48 0 0.26 0.7 0.49 0.62 0.48
0.2 0.17 0.92 0.89 0.64 0.76 0.69 0.75 0.83 0.18 0.32 0.71 0.31 0.42 0.51 0.7
0.29 0.69 0.23 0.48 0.89 0.62 0.76 0.68 0.44 0.03 0.23 0.26 0.09 0.27 0.52 0.49



Ганна Дмитрівна Салей

**ПОБУДОВА І ДОСЛІДЖЕННЯ
МАТЕМАТИЧНОЇ МОДЕЛІ
ЗАЛЕЖНОСТІ МАГНІТНОГО МОМЕНТУ
ЗЕМЛІ ВІД ШИРОТИ МЕТОДОМ
СТАТИСТИЧНИХ ВИПРОБУВАНЬ МОНТЕ
КАРЛО**
Апроксимація поліномом третього степеня

Модель ПГБ10-212

Книга написана за матеріалами роботи наукової фізико-
математичної школи МЕНУ

**Науковий керівник – кандидат технічних наук,
доцент Літнарівч Руслан Миколайович**

*Комп'ютерний набір, верстка – дизайн у
редакторі Microsoft® Office 2003® Word*

Г.Д.Салей

**МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
МІЖНАРОДНИЙ ЕКОНОМІКО-ГУМАНІТАРНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
Ім.акад. С.Дем'янчука**

**Кафедра Математичного моделювання
33027, м.Рівне, Україна
вул.акад. С.Дем'янчука, 4, корпус 1
Телефон: (+00380) 362 23-73-09
Факс: (+00380) 362 23-01-86
E-mail: mail@regi.rovno.ua**

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
МІЖНАРОДНИЙ ЕКОНОМІКО-ГУМАНІТАРНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
Ім.акад. С.Дем'янчука

О.М.Чугай

**ПОБУДОВА І ДОСЛІДЖЕННЯ
МАТЕМАТИЧНОЇ МОДЕЛІ
ЗАЛЕЖНОСТІ МАГНІТНОГО МОМЕНТУ
ЗЕМЛІ ВІД ШИРОТИ МЕТОДОМ
СТАТИСТИЧНИХ ВИПРОБУВАНЬ МОНТЕ
КАРЛО**

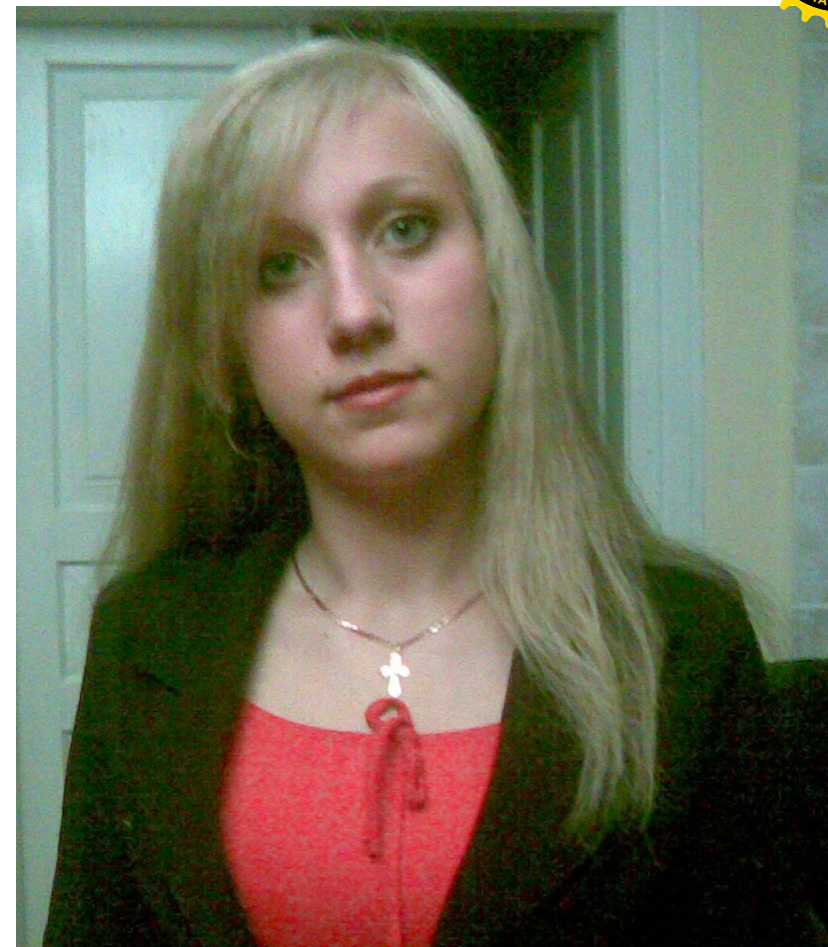
Апроксимація поліномом третього степеня



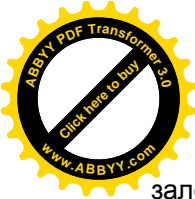
Модель ПГБ-10-214

Науковий керівник:
кандидат технічних наук,
доцент Р. М. Літнарович

Рівне – 2010



Олена Миколаївна Чугай



УДК 53. 02:550.38

Чугай О.М.. Побудова і дослідження математичної моделі залежності магнітного моменту Землі від широти методом статистичних випробувань Монте Карло. Апроксимація поліномом третього степеня. Модель ПГБ-10-214.МЕГУ, Рівне, 2010, 62 с.

Рецензент: В. Г.Бурачек, доктор технічних наук, професор

Відповідальний за випуск: Й. В. Джунь, доктор фізико-математичних наук, професор

Книга написана за матеріалами роботи наукової фізико-математичної школи МЕГУ

Встановлюється функціональна залежність магнітного моменту планети Земля від геомагнітної широти. Дається вивід формули у вигляді поліному третього порядку.

Математична модель будується на основі способу найменших квадратів.

Проводиться дослідження точності зрівноважених елементів методом статистичних випробувань Монте Карло.

Для студентів і аспірантів напрямку наук про Землю.

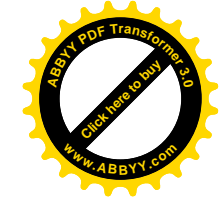
Functional dependence of magnetic moment of planet is set Earth from a geomagnetical breadth. The conclusion of formula is given in a kind to the polynomial of the third order.

A mathematical model is built on the basis of method of leastsquares.

Research of exactness of the balanced elements is conducted by the method of statistical tests of Monte Karlo.

For students and graduate students of direction of sciences about Earth.

© О.М.Чугай, 2010



ЗМІСТ

Передмова.....	5
Розділ 1. Геомагнітний момент Землі.....	6
1.1. Представлення геомагнітного моменту поля Землі.....	6
1.2. Представлення істинної моделі.....	12
Розділ 2. Побудова спотвореної моделі.....	14
2.1. Генерування істинних похибок для дослідження математичної моделі методом статистичних випробувань Монте Карло.....	14
2.2. Представлення спотвореної моделі.....	16
Розділ 3. Зрівноваження моделі.....	17
3.1. Представлення системи нормальних рівнянь.....	17
3.2. Встановлення коефіцієнтів нормальних рівнянь.....	18
3.3. Рішення нормальних рівнянь способом Крамера	20
Розділ 4. Оцінка точності.....	26
4.1. Контроль зрівноваження	26
4.2. Оцінка точності параметрів, отриманих із системи нормальних рівнянь	26
Висновки.....	32
Літературні джерела	34
Додатки	36

Передмова

Безумовний науковий і практичний інтерес представляє дослідження геомагнітного поля Землі.

Вивченню природи геомагнітного поля і в наш час приділяється велика увага. Вчені намагаються отримати відповіді на запитання: коли і як зародилося магнітне поле земної кулі? Чому воно існує мільярди років? Як це поле буде змінюватись в майбутньому?

В даній роботі ми зробимо спробу виразити один із основних компонентів геомагнітного поля Землі магнітний момент планети графічно і встановити функціональну залежність магнітного моменту від широти.

Нами підбирається емпірична формула у вигляді поліному третього порядку. Математична модель будується на основі способу найменших квадратів. Побудована ймовірніша модель приймається як істинна модель, на основі якої проводяться дослідження точності методом статистичних випробувань Монте Карло. Генеруються псевдо випадкові числа, які приймаються як істинні похибки, якими спотворюється істинна модель.

В подальшому методом найменших квадратів урівноважується спотворена модель і робиться оцінка точності врівноважених елементів. Значення істинних похибок дає можливість зробити порівняльний аналіз. Набирається велика статистика шляхом побудови і дослідження великої кількості моделей.

Розроблена методика дозволить зробити попередній розрахунок точності при проектуванні майбутніх геомагнітних досліджень в будь-якій точці планети Земля.

Розділ 1. Геомагнітний момент Землі

1.1. Представлення геомагнітного моменту поля Землі

Магнітний момент – це векторна величина, яка характеризує земну кулю як джерело магнітного поля. Макроскопічні магнітні моменти створюють замкнуті електричні струми і впорядковано орієнтовані магнітні моменти атомних частинок.

Розрахуємо магнітний момент M Землі на екваторі при $\Phi_{\text{маг. Екв.}} = 0$.

При цьому спочатку розглянемо елементи земного магнетизму.

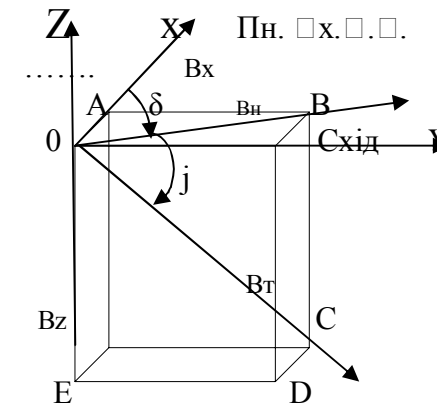


Рис.1.1. Елементи земного магнетизму

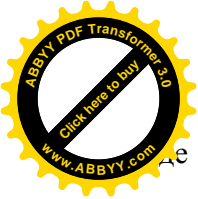
Проекції B_z і B_n індукції дипольного поля, або поля однорідного намагнічування Землі, можна знайти за допомогою формул.

Вертикальна складова геомагнітного поля Землі

$$B_z = \mu_0 \frac{M}{2\pi R^3} \sin \Phi_m \quad (1.1);$$

горизонтальна складова

$$B_n = \mu_0 \frac{M}{4\pi R^3} \cos \Phi_m \quad (1.2)$$



де μ_0 – магнітна стала;

M – магнітний момент земної кулі;

R – радіус Землі;

φ_m – геомагнітна широта, яка відраховується від геомагнітного екватора

Із приведених формул легко знайти модуль вектора індукції поля однорідного намагнічування Земної кулі:

$$\beta_T = \sqrt{B_Z^2 + B_H^2} \quad (1.3).$$

Підставляючи (1.1), (1.2) в (1.3), будемо мати:

$$\beta_T = \sqrt{\mu_0^2 \frac{M^2}{2\pi^2 R^6} \left(\sin^2 \varphi_m + \frac{\cos^2 \varphi_m}{4} \right)};$$

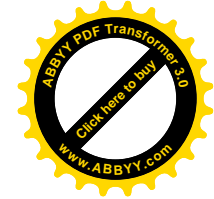
або:

$$\beta_T = \mu \frac{M}{2\pi R^3} \sqrt{\frac{4\sin^2 \varphi_m + \cos^2 \varphi_m}{4}}.$$

Приймаючи до уваги, що $\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi = 1$, а $4\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi = 3\sin^2 \varphi + \sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi$;

$$\beta_T = \mu \frac{M}{4\pi R^3} \sqrt{3\sin^2 \varphi + 1} \quad (1.4).$$

Знайдемо магнітний момент M із формули (1.4)



$$M = \frac{4\pi R^3 B_T}{\mu \sqrt{3\sin^2 \varphi_m + 1}} \quad (1.5).$$

Напруженість магнітного поля на магнітному екваторі $H_{\text{екв.}} = 0,34$ ерстеда [3, – с. 163].

Для переходу із системи СГСМ у систему СІ складемо слідууючу пропорцію

$$\text{Напруженості } 1 \frac{a}{m} \text{ відповідає } 4\pi \cdot 10^{-3} e, \\ H_{\text{екв.}} \text{ дорівнює } 0,34 e,$$

звідки

$$H_{\text{екв.}} = \frac{1 \frac{a}{m} \cdot 0,34 e}{4\pi \cdot 10^{-3} e} = 27,05634033 \frac{a}{m}.$$

В загальному випадку напруженість магнітного поля Землі можна розрахувати за формулою

$$H = \frac{B_T}{\mu_0} = \frac{M}{4\pi R^3} \sqrt{3\sin^2 \varphi_m + 1} \quad (1.6).$$

Тоді, загальна формула розрахунку магнітного моменту Землі буде

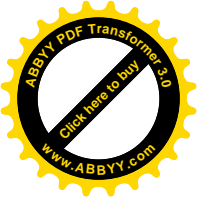
$$M = \frac{4\pi R^3 H}{\sqrt{1 + 3\sin^2 \varphi_m}}. \quad (1.7)$$

Для полюса $H_{\text{пол.}} = 0,66$ ерстед. Тоді, при переході до системи СІ

$$1 \frac{a}{m} \text{ відповідає } 4\pi \cdot 10^{-3} e,$$

$$H_{\text{пол.}} \text{ дорівнює } 0,66 e,$$

звідки



$$H_{\text{пол.}} = \frac{1 \frac{a}{m} \cdot 0,66e}{4\pi \cdot 10^{-3} e} = 52,52113122 \frac{a}{m}.$$

Магнітний момент Землі біля полюсів

$$M_{\text{пол.}} = \frac{H_{\text{пол.}} \cdot 4\pi R^3}{\sqrt{1 + 3 \sin^2 90^\circ}}$$

Взявши радіус земної кулі $R=6371000\text{м}$, а $4\pi R^3 = 3,249620751 \cdot 10^{21} \text{ м}^3$, магнітний момент земної кулі на екваторі буде

$$\frac{M_{\text{екв.}} = \frac{3,249620751 \cdot 10^{21} [\text{м}^3] \cdot 27,05634033 [\frac{a}{m}]}{1}}{1} = 8,792284498 \cdot 10^{22} \text{ ам}^2$$

Розрахуємо магнітний момент земної кулі на полюсі

$$\frac{M_{\text{пол.}} = \frac{3,249620751 \cdot 10^{21} \cdot 52,52113122}{2}}{2} = 8,533687894 \cdot 10^{22} \text{ ам}^2$$

Розрахуємо магнітний момент Землі на широті 45° , прийнявши середнє значення напруженості

$$H_{45^\circ} = \frac{H_0 + H_{90^\circ}}{2} = \frac{0,34e + 0,66e}{2} = 0,50e$$

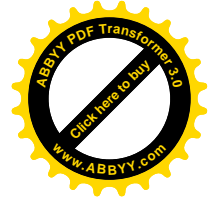
Тоді

$$1 \frac{a}{m} \text{ відповідає } 4\pi \cdot 10^{-3} e$$

$$H_{45^\circ} \text{ дорівнює } 0,5 e.$$

Звідки

$$H_{45^\circ} = \frac{1 \frac{a}{m} \cdot 0,5e}{4\pi \cdot 10^{-3} e} = 39,78873577 \frac{a}{m}$$



Таким чином, напруженість магнітного поля H_{45° буде

$$H_{45^\circ} = \frac{3,249620751 \cdot 10^{21} \text{ м}^3 \cdot 39,78873577 \frac{a}{m}}{\sqrt{1 + 3 \sin^2 45^\circ}}$$

$$H_{45^\circ} = 8,177542602 \cdot 10^{22} \text{ ам}^2$$

Знайдемо середню напруженість магнітного поля Землі для широти $22,5^\circ$

$$H_{22,5^\circ} = \frac{0,34e + 0,5e}{2} = 0,42 e,$$

для $\varphi_{\text{маг.}} = 67,5^\circ$

$$H_{67,5^\circ} = \frac{0,5e + 0,6e}{2} = 0,58e$$

для $\varphi_{\text{маг.}} 22,5^\circ$

$$1 \frac{a}{m} \text{ відповідає } 4\pi \cdot 10^3 e$$

$$H_{22,5^\circ} \text{ дорівнює } 0,42 e$$

звідки

$$H_{22,5^\circ} = \frac{1 \frac{a}{m} \cdot 0,42e}{4\pi \cdot 10^3 e} = 33,422538 \frac{a}{m},$$

І по аналогії

$$H_{67,5^\circ} = \frac{1 \frac{a}{m} \cdot 0,58e}{4\pi \cdot 10^3 e} = 46,1549335 \text{ ам}^2.$$

Магнітні моменти будуть відповідно

$$\frac{3,249620751 \cdot 10^{21} \cdot 33,42253805}{\sqrt{1 + 3 \sin^2 22,5^0}} = 9,052956514 \cdot 10^{22} \text{ ам}^2,$$

$$M_{67,5^0} = \frac{3,249620751 \cdot 10^{21} \cdot 46,1549335}{\sqrt{1 + 3 \sin^2 67,5^0}} = 7,948506716 \cdot 10^{22} \text{ ам}^2$$

Результати залежності геомагнітного моменту Землі від широти точки спостереження зведено в **Табл 1**.

Таблиця 1. Залежність геомагнітного моменту Землі від широти точки спостереження

№	$\varphi_{\text{маг.}} = X$	$Y = M = f(x) \left(\frac{a}{M} \right)$
1	0,00	$8,79 \cdot 10^{22} *$
2	11,25	$8,9 \cdot 10^{22}$
3	22,5	$9,05 \cdot 10^{22}$
4	33,75	$8,5 \cdot 10^{22}$
5	45	$8,18 \cdot 10^{22}$
6	56,25	$8 \cdot 10^{22}$
7	67,5	$7,95 \cdot 10^{22}$
8	78,75	$8,12 \cdot 10^{22}$
9	90	$8,53 \cdot 10^{22}$
n=9		$\Sigma = 76,02 \cdot 10^{22}$

Згідно формули (1,7) магнітний момент залежить від напруженості магнітного поля і широти точки спостереження, тобто є функцією двох незалежних змінних, хоча в свою чергу напруженість геомагнітного поля також залежить від широти. На жаль, у нас немає формули залежності напруженості магнітного

поля від широти, що не потребувало б знань магнітного моменту і навпаки.

Тому безперечний інтерес представляє встановлення функціональної залежності магнітного моменту, як головного компонента для визначення складових геомагнітного поля Землі, від геомагнітної широти.

Примітка. В подальшому для спрощення викладок множник 10^{22} писати не будемо, але його слід мати на увазі, особливо при оцінці точності результатів.

1.2. Представлення істинної моделі

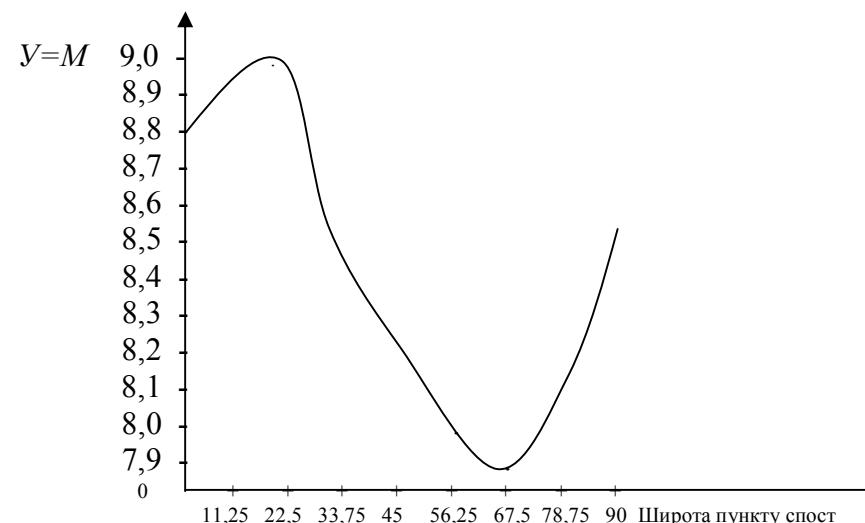


Рис. 1. Графік залежності магнітного моменту земної кулі від геомагнітної широти

Маючи вузлові точки значень геомагнітного моменту Землі в магнітних широтах $0, 22,5^0, 45^0, 67,5^0$ і 90^0 побудуємо точкову діаграму і графік, представлений на рис. 1.

Із цього графіка видно, що екстремум функції буде на широті $22,5^0$ і $67,5^0$. Як видно із графіка, кращою функцією для апроксимації буде кубічний поліном, тобто будемо шукати функціональну залежність у вигляді функції виду

$$y = ax^3 + bx^2 + cx + d \quad (1.2.1)$$

Невідомі коефіцієнти a, b, c, d визначимо по способу найменших квадратів.

Проміжні точки в $11,25^0, 33,75^0, 56,25^0$ і $78,75^0$ визначимо безпосередньо із графіка. Цього нам буде цілком достатньо для побудови експериментальної моделі.

Побудовану таким чином експериментальну модель залежності магнітного моменту земної кулі від широти в подальшому зрівноважили і отримали формулу [7,с.38]

$$Y=M=1.2190 \cdot 10^{-5} X^3 - 1.4404 \cdot 10^{-3} X^2 + 2.8370 \cdot 10^{-2} X + 8,8028 \quad (1.2.2)$$

яку прийемо за істинну модель і, генеруючи істинні похибки будемо створювати спотворені моделі, на яких можна дослідити точність визначення магнітного моменту в залежності від похибки визначення широти.

Таблиця 2.Залежність геомагнітного моменту Землі від широти точки спостереження (істинна модель за формулою 1.1)

№	$\varphi_{\text{маг.}} = X$	$Y = M = f(x) \left(\frac{a}{M} \right)$
1	0	8,803
2	11,25	8,957
3	22,5	8,851
4	33,75	8,598
5	45	8,274
6	56,25	8,011
7	67,5	7,904
8	78,75	8,057
9	84,375	8,264
10	90	8,575
n=9	489,375	84,294

Розділ 2. Побудова спотвореної моделі

2.1. Генерування істинних похибок для дослідження математичної моделі методом статистичних випробувань Монте Карло

В роботі [1] істинна модель спотворювалась введенням істинних похибок в незалежні змінні X. В даній монографії істинні похибки будемо вводити в експериментальні параметри Y.

Приведемо методику розрахунку випадкових чисел, які прийемо в подальшому, як істинні похибки для побудови спотвореної моделі.

1. Отримавши ряд випадкових (а точніше псевдо-

$$\text{випадкових) чисел } \xi_{cp}, \quad \xi_{cp} = \frac{\sum_{i=1}^n \xi_i}{n}, \quad (2.1.1)$$

Де n – сума випадкових чисел.

2. Розраховуються попередні значення істинних похибок Δ'_i за формулою

$$\Delta'_i = \xi_i - \xi_{cp} \quad (2.1.2)$$

3. Знаходять середню квадратичну похибку попередніх істинних похибок за формулою Гауса

$$m_{\Delta'} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n \Delta'^2_i}{n}} \quad (2.1.3)$$

4. Знаходять коефіцієнт пропорційності K, для визначення істинних похибок необхідності точності

$$K = \frac{c}{m'_{\Delta'}} \quad (2.1.4)$$

де c – необхідна константа.

Так, наприклад, при $m'_{\Delta'} = 0,28$ і необхідності побудови математичної моделі з точністю $c = 0,1$, будемо мати

$$K_{0,1} = \frac{0,1}{0,28} = 0,357, \text{ а при } c = 0,05, \text{ отримаємо}$$

$$K = \frac{0,05}{0,28} = 0,178.$$

5. Істинні похибки розраховуються за формулою

$$\Delta_i = \Delta'_i \cdot K \quad (2.1.5)$$

6. Заключним контролем служить розрахунок середньої квадратичної похибки m_{Δ} генерованих істинних похибок Δ

$$m_{\Delta} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n \Delta^2}{n}} \quad (2.1.6)$$

$$\text{і порівняння} \quad m_{\Delta} = c \quad (2.1.7)$$

Таблиця 3. Генерування псевдо-випадкових чисел і розрахунок істинних похибок

№	ξ_i	ξ_{cp}	$\Delta'_i = \xi_i - \xi_{cp}$	$\Delta_i'^2$	$\Delta_i = \Delta'_i \cdot K$	Δ_i^2
1	0,61	0,416	0,194	0,03764	0,0721	0,00520524
2	0,02	0,416	-0,396	0,15682	-0,1473	0,02168843
3	0,3	0,416	-0,116	0,01346	-0,0431	0,00186103
4	0,26	0,416	-0,156	0,02434	-0,058	0,00336579
5	0,3	0,416	-0,116	0,01346	-0,0431	0,00186103
6	0,57	0,416	0,154	0,02372	0,05727	0,00328004
7	0,58	0,416	0,164	0,02690	0,06099	0,00371985
8	0,92	0,416	0,504	0,25402	0,18743	0,03513167
9	0,57	0,416	0,154	0,02372	0,05727	0,00328004
10	0,03	0,416	-0,386	0,14900	-0,1436	0,02060688
n=10	4,16	4,16	-4E-16	0,72304	0,0E+00	0,10000000

Середня квадратична похибка попередніх істинних похибок

$$\Delta'_o = \sqrt{\frac{0,72304}{10}} = 0,2688940338$$

$$\text{Коефіцієнт пропорційності } K = \frac{0,1}{0,2688940338} = 0,3718937106$$

Середня квадратична похибка при генеруванні випадкових чисел з точністю $c = 0,1$

$$m_{\Delta_i} = \sqrt{\frac{0,1000000}{10}} = 0,1$$

2.2. Представлення спотвореної моделі

Таблиця 4. Побудова спотвореної моделі

№	Істинна модель		Δ_i	$Y_{спотв.} = Y_{icm.} + \Delta_i$
	x_{icm}	y_{icm}		
1	0	8,803	0,0721	8,875
2	11,25	8,957	-0,1473	8,810
3	22,5	8,851	-0,0431	8,8079
4	33,75	8,598	-0,058	8,5400
5	45	8,274	-0,0431	8,2309
6	56,25	8,011	0,05727	8,0683
7	67,5	7,904	0,06099	7,9650
8	78,75	8,057	0,18743	8,2444
9	84,375	8,264	0,05727	8,3213
10	90	8,575	-0,1436	8,4314
	489,375	84,294	0,0E+00	84,294

По даним спотвореної моделі виконують строге зрівноваження методом найменших квадратів і отримують ймовірнішу модель, роблять оцінку точності зрівноважених елементів і дають порівняльний аналіз.

Розділ 3. Зрівноваження моделі

3.1. Представлення системи нормальних рівнянь

У результаті проведеного експерименту ми маємо ряд результатів X_i, V_i , функціональну залежність між якими будемо шукати за допомогою поліному степені K , де коефіцієнти a_i являються невідомими.

Тоді, система нормальних рівнянь буде

$$\begin{aligned} na_0 + a_3[x] + a_2[x^2] + \dots + a_m[x^m] - [y] &= 0, \\ a_0[x] + a_3[x^2] + a_2[x^3] + \dots + a_m[x^{m+1}] - [xy] &= 0, \\ a_0[x^2] + a_1[x^3] + a_2[x^4] + \dots + a_m[x^{m+1}] - [x^2y] &= 0, \end{aligned} \quad (3.1.1)$$

$$a_0[x^m] + a_1[x^{m+1}] + a_2[x^{m+2}] + \dots + a_m[x^{2m}] - [x^m y] = 0,$$

де знаком $[\]$ позначена сума відповідного елемента.

Для поліному третього порядку виду

$$y = ax^3 + bx^2 + cx + d \quad (3.1.2)$$

Система нормальних рівнянь буде

$$\begin{aligned} dn + c[x] + b[x^2] + a[x^3] - [y] &= 0, \\ d[x] + c[x^2] + b[x^3] + a[x^4] - [xy] &= 0, \\ d[x^2] + c[x^3] + b[x^4] + a[x^5] - [x^2y] &= 0, \\ d[x^3] + c[x^4] + b[x^5] + a[x^6] - [x^3y] &= 0. \end{aligned} \quad (3.1.3)$$

або

$$\begin{aligned} a[x^6] + b[x^5] + c[x^4] + d[x^3] - [x^3y] &= 0, \\ a[x^5] + b[x^4] + c[x^3] + d[x^2] - [x^2y] &= 0, \\ a[x^4] + b[x^3] + c[x^2] + d[x] - [xy] &= 0, \\ a[x^3] + b[x^2] + c[x] + dn - [y] &= 0. \end{aligned} \quad (3.1.4)$$

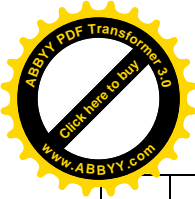
В подальшому будемо рishати систему лінійних нормальних рівнянь (3.1.3) або (3.1.4) одним із відомих в математиці способів.

3.2. Встановлення коефіцієнтів нормальних рівнянь

Приведемо розрахункову таблицю, на основі якої стримують коефіцієнти нормальних рівнянь.

Таблиця 5. Розрахунок коефіцієнтів нормальних рівнянь

№	$x_{істн.}$	$y_{спов.}$	x^0	x^2	x^3	x^4	x^5
1	0	8,875	1	0	0	0	0
2	11,25	8,810	1	126,563	1423,828	16018,066	180203,247
3	22,5	8,8079	1	506,250	11390,625	256289,063	5766503,906
4	33,75	8,5400	1	1139,063	38443,359	1297463,379	43789389,038
5	45	8,2309	1	2025,000	91125,000	4100625,000	184528125,000
6	56,25	8,0683	1	3164,063	177978,516	10011291,504	563135147,095
7	67,5	7,9650	1	4556,250	307546,875	20759414,063	1401260449,219
8	78,75	8,2444	1	6201,563	488373,047	38459377,441	3028675973,511
9	84,375	8,3213	1	7119,141	600677,490	50682163,239	4276307523,251
10	90	8,4314	1	8100,000	729000,000	65610000,000	5904900000,000
Σ	489,375	84,294	10	32937,891	2445958,740	191192641,754	15408543314,266

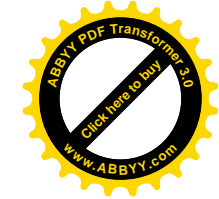


Продовження таблиці 5

№	x^6	xy	x^2y	x^3y
1	0	0	0	0
2	2027286,530	99,1094635	1114,981	12543,54147
3	129746337,891	198,176857	4458,979	100327,0341
4	1477891880,035	288,22448	9727,576	328305,6963
5	8303765625,000	370,388715	16667,49	750037,1475
6	31676352024,078	453,840279	25528,52	1435979,009
7	94585080322,266	537,636863	36290,49	2449607,959
8	238508232913,971	649,249212	51128,38	4026359,563
9	360813447274,268	702,107294	59240,3	4998400,559
10	531441000000,000	758,830412	68294,74	6146526,34
Σ	1266937543664,040	4057,564	272451,4	20248086,8

Таким чином, на основі проведених розрахунків нами отримана наступна матриця коефіцієнтів нормальних рівнянь

10,0	489,4	32937,9	2445958,7
489,4	32937,9	2445958,7	191192641,8
32937,9	2445958,7	191192641,8	15408543314,3
2445958,7	191192642	15408543314,3	1266937543664,0



3.3. Рішення системи лінійних рівнянь способом Крамера

Нехай, маємо систему лінійних рівнянь

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2, \\ &\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n &= b_n. \end{aligned} \quad (3.3.1)$$

Для того, щоб із цієї системи визначити невідомі x , складемо із коефіцієнтів при невідомих визначник Δ , який називається визначником системи рівнянь (3.3.1).

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \quad (3.3.2)$$

Помножимо ліву і праву частини рівності (3.3.2) на x_i . В лівій частині будемо мати Δx_i , в правій же частині введемо у всі члени i -го стовпчика визначника a_k і множник x_i

$$\Delta \cdot x_i = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1i}x_i & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2i}x_i & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{ni}x_i & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \quad (3.3.3)$$

Потім до i -го стовпчика визначника (3.3.3) додамо всі інші стовпчики, помножені відповідно на x_1, x_2, \dots, x_n . Величина визначника від цього не зміниться. Тоді i -стовпчик представить собою ліву частину системи рівнянь (3.3.1).

Замінімо його вільними членами цієї системи і позначимо через Δ_i

$$\Delta \cdot x_i = \Delta_i = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & b_1 \dots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & b_2 \dots a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & b_n \dots a_{nn} \end{vmatrix} \quad (3.3.4)$$

$$\text{Звідки, } x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & b_1 \dots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & b_2 \dots a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & b_n \dots a_{nn} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \dots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \dots a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} \dots a_{nn} \end{vmatrix}}. \quad (3.3.5)$$

Формула (3.3.5) дає можливість визначити кожне невідоме системи лінійних рівнянь (3.3.1).

Якщо вільні члени системи лінійних рівнянь рівні нулю, то вона буде системою лінійних однокорінних рівнянь.

Система лінійних одно корінних рівнянь може мати рішення відмінне від нульового, якщо визначник системи Δ рівний нулю.

Для системи чотирьох лінійних рівнянь

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 &= b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 &= b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + a_{34}x_4 &= b_3, \\ a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + a_{43}x_3 + a_{44}x_4 &= b_4, \end{aligned} \quad (3.3.6)$$

якщо визначник системи Δ не дорівнює нулю

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} \neq 0, \quad (3.3.7)$$

то система визначника і по Крамеру її невідомі виражаються формулами

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ b_4 & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}}{\Delta}, \quad (3.3.8)$$

$$x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & b_4 & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}}{\Delta}, \quad (3.3.9)$$

$$x_3 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & b_2 & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & b_3 & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & b_4 & a_{44} \end{vmatrix}}{\Delta}, \quad (3.3.10)$$

$$x_4 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & b_3 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & b_4 \end{vmatrix}}{\Delta} \quad (3.3.11)$$

Як бачимо, що

$$\Delta_{x_1} = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ b_4 & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}, \quad (3.3.12)$$

$$\Delta_{x_2} = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & b_4 & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}, \quad (3.3.13)$$

$$\Delta_{x_3} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & b_2 & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & b_3 & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & b_4 & a_{44} \end{vmatrix}, \quad (3.3.14)$$

$$\Delta_{x_4} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & b_3 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & b_4 \end{vmatrix}. \quad (3.3.15)$$

Приведемо формулу знаходження визначника четвертого порядку

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = (a_{23}a_{43} - a_{33}a_{42})(a_{11}a_{24} - a_{14}a_{21}) + \\ + (a_{32}a_{44} - a_{34}a_{42})(a_{13}a_{21} - a_{11}a_{23}) + (a_{31}a_{43} - a_{33}a_{41})(a_{14}a_{22} - a_{12}a_{24}) + \\ + (a_{31}a_{42} - a_{32}a_{41})(a_{13}a_{24} - a_{14}a_{23}) + (a_{33}a_{44} - a_{34}a_{43})(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) + \\ + (a_{31}a_{44} - a_{34}a_{41})(a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22}). \quad (3.3.16)$$

І в нашому випадку визначник системи $D = 1,38204E+21$

1266937543664,0 4	15408543314,27	191192642	2445959
15408543314,266	191192642	2445959	32937,891
191192641,754	2445959	32938	489
2445958,740	32938	489	10

20248086,8499	15408543314	191192642	2445959
272451,44855	191192642	2445959	32938
4057,5635759	2445959	32938	489
84,294000000	32938	489	10
D1=		1,06192E+16	

тоді невідомий коефіцієнт a при x^3 буде

$$\dot{a} = \tilde{\sigma}_1 = \frac{D1}{D} = \frac{1,06192E+16}{1.38204E+21} = 0,000007684;$$

1266937543664	20248086,850	191192642	2445959
15408543314	272451,449	2445959	32938
191192642	4057,564	32938	489,375
2445959	84,2940	489,375	10

D2=	-1,1565E+18		
-----	-------------	--	--

тоді невідомий коефіцієнт b при x^2 буде

$$b = \tilde{\delta}_2 = \frac{D2}{D} = \frac{-1,1565E+18}{1.38204E+21} = -0,000837;$$

1266937543664	15408543314	20248087	2445958,7
15408543314	191192642	272451	32937,891
191192642	2445959	4058	489,375
2445959	32938	84,294	10
D3=	1,2455E+19		

і невідомий коефіцієнт c при x буде

$$\tilde{n} = \tilde{\delta}_3 = \frac{D3}{D} = \frac{1,2455E+19}{1.38204E+21} = 0,009012;$$

1266937543664	15408543314	191192642	20248087
15408543314	191192642	2445959	272451
191192642	2445959	32938	4058
2445959	32938	489,375	84,294
D4=	1,2252E+22		

коефіцієнт d буде

$$d = \frac{D4}{D} = \frac{1,2252E+22}{1.38204E+21} = 8,865123$$

Таким чином, на основі проведених досліджень, математична модель залежності магнітного моменту планети Земля y_i від широти пункту спостереження x_i виражається формулою

$$y' = 0,000007684x^3 - 0,000837x^2 + 0,009012x + 8,865123.$$

Розділ 4. Оцінка точності

4.1. Контроль зрівноваження

Підставляючи отримані значення коефіцієнтів a, b, c, d у формулу (3.4), отримаємо наступні результати.

Таблиця 6. Коефіцієнти нормальних рівнянь і контроль зрівноваження

	x^3	x^2	x	x^0	y	Контроль
x^3	1266937543664,04	15408543314,27	191192642	2445959	20248086,85	20248086,850
x^2	15408543314,266	191192642	2445959	32937,891	272451,449	272451,449
x	191192641,754	2445959	32938	489	4057,564	4057,564
x^0	2445958,740	32938	489	10	84,294	84,294
	0,000011105	-0,001314	0,024841	8,825023		
	Ошибка! Объект не может быть создан из кодов полей редактирования.	b	c	d		

$$[YY] - d[YYX] - b[YYX^2] - c[YYX^3] - d[Y] -$$

$$= 0,03402036. \quad \text{З другої сторони } [VV] = 0,034020$$

4.2. Оцінка точності параметрів, отриманих із рішення системи нормальних рівнянь

Середні квадратичні похибки визначаємих x_1, x_2, x_3, x_4 розраховуються за формулами:

$$m_{x_1} = \mu \sqrt{\frac{A_{11}}{D}}, \quad (4.2.1)$$

$$m_{x_2} = \mu \sqrt{\frac{A_{22}}{D}}, \quad (4.2.2)$$

$$m_{x_3} = \mu \sqrt{\frac{A_{33}}{D}}, \quad (4.2.3)$$

$$m_{x_4} = \mu \sqrt{\frac{A_{44}}{D}}, \quad (4.2.4)$$

де $m_{x_1}, m_{x_2}, m_{x_3}, m_{x_4}$ – середні квадратичні похибки визначаємих невідомих x_1, x_2, x_3, x_4 , μ – середня квадратична похибка одиниці ваги, яка розраховується за формулою

$$\mu = \sqrt{\frac{[VV]}{n - K}} \quad (4.2.5)$$

У формулі (4.2.5) n - число початкових рівнянь, K - число невідомих. В нашому випадку $n = 10; K = 4$. V - різниця між вихідним значенням y_i і вирахуванням значенням y' за отриманою нами формулою (3.3.17);

$$V_i = y_i - y'_i \quad (4.2.6)$$

$A_{11}, A_{22}, A_{33}, A_{44}$ – алгебраїчні доповнення першого, другого, третього і четвертого діагональних елементів

$$A_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}, \quad (4.2.7)$$

$$A_{22} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} & a_{14} \\ a_{31} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}, \quad (4.2.8)$$

$$A_{33} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{24} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{vmatrix}, \quad (4.2.9)$$

$$A_{44} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad (4.2.10)$$

$$\text{де } \Delta = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} + a_{14}A_{14}. \quad (4.2.11)$$

Приведемо формулу розкриття визначника третього порядку

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) + a_{12}(a_{23}a_{31} - a_{21}a_{33}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}). \quad (4.2.12)$$

І в нашому випадку отримаємо

		191192642	2445959	32938
A11=	4,7761E+11	2445959	32938	489,375
		32937,891	489,375	10

величина оберненої ваги

$$\frac{1}{P_{x_1}} = \frac{A_{11}}{D} = \frac{4.7761E+11}{1.38204E+21} = 3.45593E-10, \text{ а}$$

$$\sqrt{\frac{1}{P_{x_{11}}}} = 0,00001859.$$

		1266937543664	191192642	2445959
A22=	8,99382E+15	191192642	32938	489,375
		2445959	489	10

$$\frac{1}{P_{x_2}} = \frac{A_{22}}{D} = \frac{8,99382E+15}{1.38204E+21} = 0,000006508; \sqrt{\frac{1}{P_{x_{22}}}} = 0,00255.$$

A33=	1,24719,E+19	1266937543664	15408543314	2445959
		15408543314	191192642	32938
		2445959	32938	10

$$\frac{1}{P_{x_3}} = \frac{A_{33}}{D} = \frac{1,24719E+19}{1.38204E+21} = 0,00902; \sqrt{\frac{1}{P_{x_{33}}}} = 0,0950.$$

		1266937543664	15408543314	191192642
A44=	1,1858101,E+21	15408543314	191192642	2445959
		191192642	2445959	32938

$$\frac{1}{D_{\delta_4}} = \frac{A_{44}}{D} = \frac{1,1858101E+21}{1.38204E+21} = 0,8580; \sqrt{\frac{1}{P_{x_{44}}}} = 0,9263.$$

Підставляючи у виведену нами, формулу (3.3.17) значення X спотвореної моделі отримаємо розрахункові значення y' , які будуть дещо відрізнятися від вихідних значень Y .

Таблиця 6. порівняльний аналіз результатів строгого зрівноваження

№	$x_{істн.}$	$y_{спотв.}$	$y'_{зрівноваж.}$	$V = y_i - y'_i$	V^2
1	0	8,875	8,8651235	1,002E-02	0,000100479
2	11,25	8,810	8,8715468	-6,182E-02	0,003821304
3	22,5	8,8079	8,7318022	7,606E-02	0,005784836
4	33,75	8,5400	8,5115319	2,845E-02	0,000809553
5	45	8,2309	8,2763781	-4,552E-02	0,002071866
6	56,25	8,0683	8,0919828	-2,371E-02	0,00056222
7	67,5	7,9650	8,0239883	-5,900E-02	0,003480727
8	78,75	8,2444	8,1380366	1,064E-01	0,011320506
9	84,375	8,3213	8,28384	3,743E-02	0,001401129
10	90	8,4314	8,4997699	-6,832E-02	0,004667742
$n=10$	489,375	84,294	84,29	0,0000000	0,034020

Тоді, середня квадратична похибка одиниці ваги буде

$$\mu = \sqrt{\frac{[VV]}{n-K}} = 0,075299801.$$

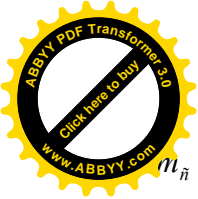
Середня квадратична похибка визначення коефіцієнта a

$$m_a = \mu \sqrt{\frac{1}{P_a}} = 0,075299801 * 0,00001859 = 1,39982E-06$$

Середня квадратична похибка визначення коефіцієнта b

$$m_b = \mu \sqrt{\frac{1}{P_b}} = 0,075299801 * 0,00255 = 0,000192091$$

Середня квадратична похибка визначення коефіцієнта c



$$m_{\tilde{n}} = \mu \sqrt{\frac{1}{P_{\tilde{n}}}} = 0,075299801 * 0,0950 = 0,007153215$$

Середня квадратична похибка визначення коефіцієнта d

$$m_d = \mu \sqrt{\frac{1}{P_d}} = 0,075299801 * 0,9263 = 0,0697496$$

Середні квадратичні похибки зрівноваженої функції $m\phi=$

0,0697496
0,04313673
0,04584176
0,04211635
0,038050
0,0420424
0,04473986
0,03813419
0,04089106
0,06112177

Перевірка моделі на адекватність за критерієм Фішера

		52,6860
	F=	1
	F>F(0,05;3;6)	
F(0,05;4;6)	4,53367	
=	7	
Модель адекватна експериментальним даним		

Встановлення значимості коефіцієнтів регресії

Коефіцієнти регресії значимі			
ta=	5,489125	t(0,05;6)=	2,44691
tb=	4,356174		2



tc=	1,25989	t(0,08;6)=	2,10430
td=	127,0993		6

Висновки

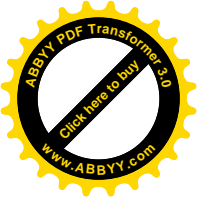
На основі проведених досліджень в даній роботі:

1. Генеровані випадкові числа, які приведено до нормованої досліджуваної точності.
2. На основі істинної моделі і генерованих істинних похибок побудована спотворена модель залежності магнітного моменту Землі від широти.
3. Математична модель апроксимована по способу найменших квадратів кубічним поліномом.
4. Отримана формула

$$y' = 0,000007684x^3 - 0,000837x^2 + 0,009012x + 8,865123.$$
залежності магнітного моменту Землі Y від широти X .

Встановлено, що середня квадратична похибка одиниці ваги за результатами зрівноваження складає
 $\mu = 0,075299801 * 10^{22} \text{ ам}^2.$

5. Середня квадратична похибка визначення коефіцієнта a при x^3 $m_a = 1,39982E - 06$;
 - середня квадратична похибка визначення коефіцієнта b при x^2 $m_b = 0,000192091$;

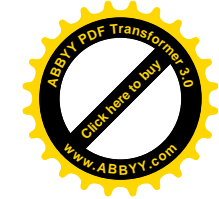


- середня квадратична похибка визначення коефіцієнта c при x $\delta_c = 0,007153215$;
- середня квадратична похибка визначення коефіцієнта d при $m_d = 0,0697496$.

середні квадратичні похибки зрівноваженої функції $m\phi =$

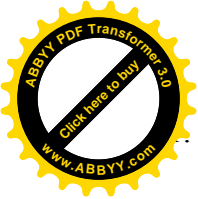
0,0697496
0,04313673
0,04584176
0,04211635
0,038050
0,0420424
0,04473986
0,03813419
0,04089106
0,06112177

6. Розроблена методика підготовки істинних похибок наперед заданої точності.
7. Дана робота відкриває дорогу для проведення досліджень методом статистичних випробувань Монте Карло.
8. Вона дає можливість охопити велику аудиторію, тому що генеруються похибки індивідуально і вони не повторюються в других моделях.
9. Робота виконується вперше. Нам не відомі літературні джерела, де б виконувались аналогічні дослідження в курсі Фізики з основами геофізики.



Літературні джерела

1. Букеєв Б.О. Дослідження точності апроксимації залежності магнітного моменту Землі від широти методом статистичних випробувань Монте Карло. Модель ПГБ 61-.МЕГУ, Рівне, 2006, -29с.
2. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике. – М.: Наука, 1973,-831с.
3. Кошкин Н. И., Ширкевич М. Г. Справочник по элементарной физике. – М.: Наука, 1972,-255с.
4. Кучерук І. М., Горбачук І. Т., Луцик П. П. Загальний курс фізики. Т. 1. – К.: Техніка, 1999,-536с.
5. Кучерук І. М., Горбачук І. Т., Луцик П. П. Загальний курс фізики. Т. 2. – К.: Техніка, 1999,-452с.
6. Кучерук І. М., Горбачук І. Т. Загальний курс фізики. Т.3 . – К.: Техніка, 1999,-520с.
7. Літнарівич Р. М. Дослідження точності апроксимації залежності магнітного моменту Землі від широти методом статистичних випробувань Монте Карло. Частина 1. МЕГУ, Рівне, 2006,-44с.
8. Літнарівич Р.М. Встановлення зв'язку між географічною і геомагнітною системами координат. Частина 2.МЕГУ,Рівне,2006,-47с.
9. Літнарівич Р.М. Фізика з основами геофізики. Курс лекцій.МЕГУ,Рівне,2007,-78с.
10. Літнарівич Р.М. Фізика з основами геофізики. Лабораторний практикум. Частина 1.МЕГУ,Рівне,2007,-44с.



- Літнарів Р.М. Фізика з основами геофізики. Лабораторний практикум. Частина 2. МЕНУ, Рівне, 2008, - 48с.
12. Мудров В. И., Кушко В. Л. Методы обработки измерений. – М.: Сов. радио, 1976, -192с.
 13. Пастушенко С. М. Формули і закони загальної фізики: навчальний посібник для студентів вищих навчальних закладів. 2е вид.: Діал., 2005, -266с.
 14. Рого К. Г. Метрологическая обработка результатов технических измерений. Справочное пособие. – К.: Техніка, 1987, -126с.
 15. Розв'язування задач з курсу загальної фізики. Практикум/Остроухов А. А., Стрижевський В. Л., Цвілих М. Г. та інші. –К.: Радянська школа, 1966, -503с
 16. Савельев И. В. Курс физики. Т.1. –М.: Наука, 1989, -352с
 17. Савельев И. В. Курс физики. Т.2. –М.: Наука, 1989, -464с
 18. Савельев И. В. Курс общей физики. –М.: Наука, 1982, - 304с
 19. Ситніков О. П. Основы электродинамики. Лабораторный практикум. Чернівці: ЧДІЕіУ, 2003, -48с
 20. Суботін С. І. Кора і мантія Землі. –К.: Знання, 1996, -39с.
 21. Топографо-геодезические термины: справочник/ Кузьмин Б. С., Герасимов Ф. Я., Молоканов В. М. и др. – М.: Недра, 1989, -261с.
 22. Федоров Є. П. Обертання Землі. – К.: Знання, 1966, -52с
 23. Фізика з використанням обчислювальної техніки. Практичний курс/ В. М. Казанський, В. І. Кланченко, Д. Кошелева та ін. – К.: Либідь, 1993, -224с.

Додатки

Додаток 1.

Генерування псевдовипадкових чисел, підпорядкування їх нормальному закону розподілу і розрахунок істинних похибок

0,61	0,416	0,194	0,03764	0,0721	0,00520524
0,02	0,416	-0,396	0,15682	-0,1473	0,02168843
0,3	0,416	-0,116	0,01346	-0,0431	0,00186103
0,26	0,416	-0,156	0,02434	-0,058	0,00336579
0,3	0,416	-0,116	0,01346	-0,0431	0,00186103
0,57	0,416	0,154	0,02372	0,05727	0,00328004
0,58	0,416	0,164	0,02690	0,06099	0,00371985
0,92	0,416	0,504	0,25402	0,18743	0,03513167
0,57	0,416	0,154	0,02372	0,05727	0,00328004
0,03	0,416	-0,386	0,14900	-0,1436	0,02060688
4,16	4,16	-4E-16	0,72304	0,0E+00	0,10000000
A	B	C	D	E	F

Додаток 2.

Побудова спотвореної моделі

0	8,803	0,0721	8,875
11,25	8,957	-0,1473	8,810
22,5	8,851	-0,0431	8,8079
33,75	8,598	-0,058	8,5400
45	8,274	-0,0431	8,2309
56,25	8,011	0,05727	8,0683

67,5	7,904	0,06099	7,9650
78,75	8,057	0,18743	8,2444
84,375	8,264	0,05727	8,3213
90	8,575	-0,1436	8,4314
489,375	84,294	0,0E+00	84,294
I	G	E	H
Хексп.=Хістн.	Уістн.	Істинні похиб.	Усптв.

Додаток 3.

Розрахункова таблиця

0	1	0	0	0	0	0
11,25	1	126,563	1423,828	16018,066	180203,247	2027286,530
22,5	1	506,250	11390,625	256289,063	5766503,906	129746337,891
33,75	1	1139,063	38443,359	1297463,379	43789389,038	1477891880,035
45	1	2025,000	91125,000	4100625,000	184528125,000	8303765625,000
56,25	1	3164,063	177978,516	10011291,504	563135147,095	31676352024,078
67,5	1	4556,250	307546,875	20759414,063	1401260449,219	94585080322,266
78,75	1	6201,563	488373,047	38459377,441	3028675973,511	238508232913,971
84,375	1	7119,141	600677,490	50682163,239	4276307523,251	360813447274,268
90	1	8100,000	729000,000	65610000,000	5904900000,000	531441000000,000
489,375	10	32937,891	2445958,740	191192641,754	15408543314,266	1266937543664,040
I	J	K	L	M	N	O
Хексп.=Хістн.	X0	X^2	X^3	X^4	X^5	X^6

Продовження розрахункової таблиці

0	0	0	8,8651235	1,002E-02	0,000100479
99,1094635	1114,981	12543,54147	8,8715468	-6,182E-02	0,003821304
198,176857	4458,979	100327,0341	8,7318022	7,606E-02	0,005784836
288,22448	9727,576	328305,6963	8,5115319	2,845E-02	0,000809553
370,388715	16667,49	750037,1475	8,2763781	-4,552E-02	0,002071866
453,840279	25528,52	1435979,009	8,0919828	-2,371E-02	0,00056222

537,636863	36290,49	2449607,959	8,0239883	-5,900E-02	0,00348
649,249212	51128,38	4026359,563	8,1380366	1,064E-01	0,0113205
702,107294	59240,3	4998400,559	8,28384	3,743E-02	0,001401129
758,830412	68294,74	6146526,34	8,4997699	-6,832E-02	0,004667742
4057,564	272451,4	20248086,8	84,29	0,0000000	0,034020
P	Q	R	S	T	U
YX	YX^2	YX^3	Y'зрівн.	V=Yсптв.-Yз	VV

Додаток 4.

Розрахунок визначників

1266937543664,04	15408543314,27	191192642	2445959
15408543314,266	191192642	2445959	32937,891
191192641,754	2445959	32938	489
2445958,740	32938	489	10
D=	1,38204E+21		
20248086,8499	15408543314	191192642	2445959
272451,44855	191192642	2445959	32938
4057,5635759	2445959	32938	489
84,294000000	32938	489	10
D1=	1,06192E+16		
1266937543664	20248086,850	191192642	2445959
15408543314	272451,449	2445959	32938
191192642	4057,564	32938	489,375
2445959	84,2940	489,375	10
D2=	-1,1565E+18		
1266937543664	15408543314	20248087	2445958,7
15408543314	191192642	272451	32937,891
191192642	2445959	4058	489,375
2445959	32938	84,294	10
D3=	1,2455E+19		

1266937543664	15408543314	191192642	20248087
15408543314	191192642	2445959	272451
191192642	2445959	32938	4058
2445959	32938	489,375	84,294
D4=	1,2252E+22		

Додаток 5.

Вільні члени нормальних рівнянь

20248086,85
272451,449
4057,564
84,294

Додаток 6.

Розрахунок коефіцієнтів апроксимуючого поліному

a=D1/D=	0,000007684
b=D2/D=	-0,000837
c=D3/D=	0,009012
d=D4/D=	8,865123
Y=aX^3+bX^2+cX+d	

Нами виведена формула за результатами теоретичних досліджень:

$$\delta' = 0,000007684\delta^3 - 0,000837\delta^2 + 0,009012\delta + 8,865123.$$

Додаток 7.

Знаходження алгебраїчних доповнень

			1266937543664	15408543314	191192642
A44=	1,1858101,E+21		15408543314	191192642	2445959
			191192642	2445959	32938

			1266937543664	191192642	2445959
A22=	8,99382E+15		191192642	32938	489,375
			2445959	489	10

A33=	1,24719,E+19		1266937543664	15408543314	2445959
			15408543314	191192642	32938
			2445959	32938	10

			191192642	2445959	32938
A11=	4,7761E+11		2445959	32938	489,375
			32937,891	489,375	10

Додаток 8.

Контроль зрівноваження

[yy]-	a[yx^3]-	b[yx^2]	- c[yx] -	d[y]	=	0,03402036
					[VV] =	0,034020360
					Різниця=	0,000000

Додаток 9.

Оцінка точності зрівноважених елементів

Середня	квадратична похибка одиниці ваги
μ=	0,075299801
Середня	квадратична похибка коефіцієнта а
ma=	1,39982E-06
Середня	квадратична похибка коефіцієнта в
mb=	0,000192091
Середня	квадратична похибка коефіцієнта с

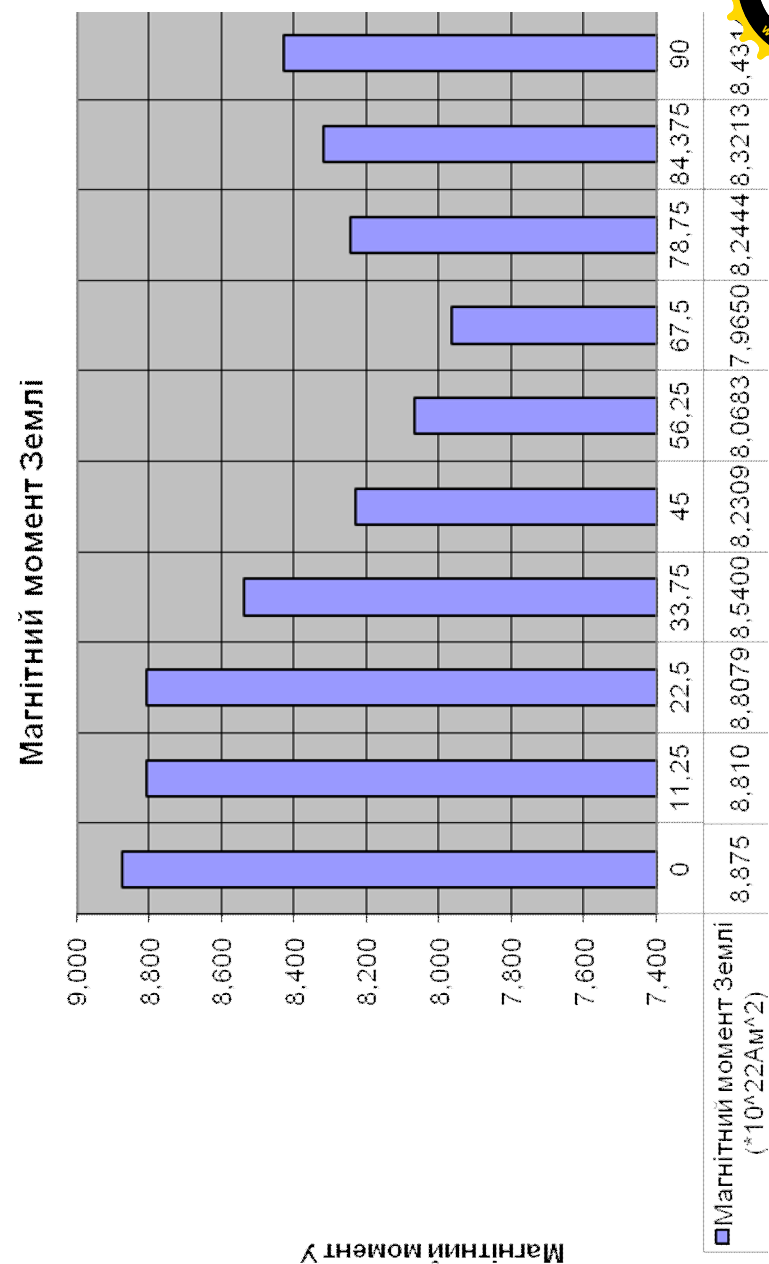
mc= 0,007153215
Середня квадратична похибка коефіцієнта d
md= 0,0697496

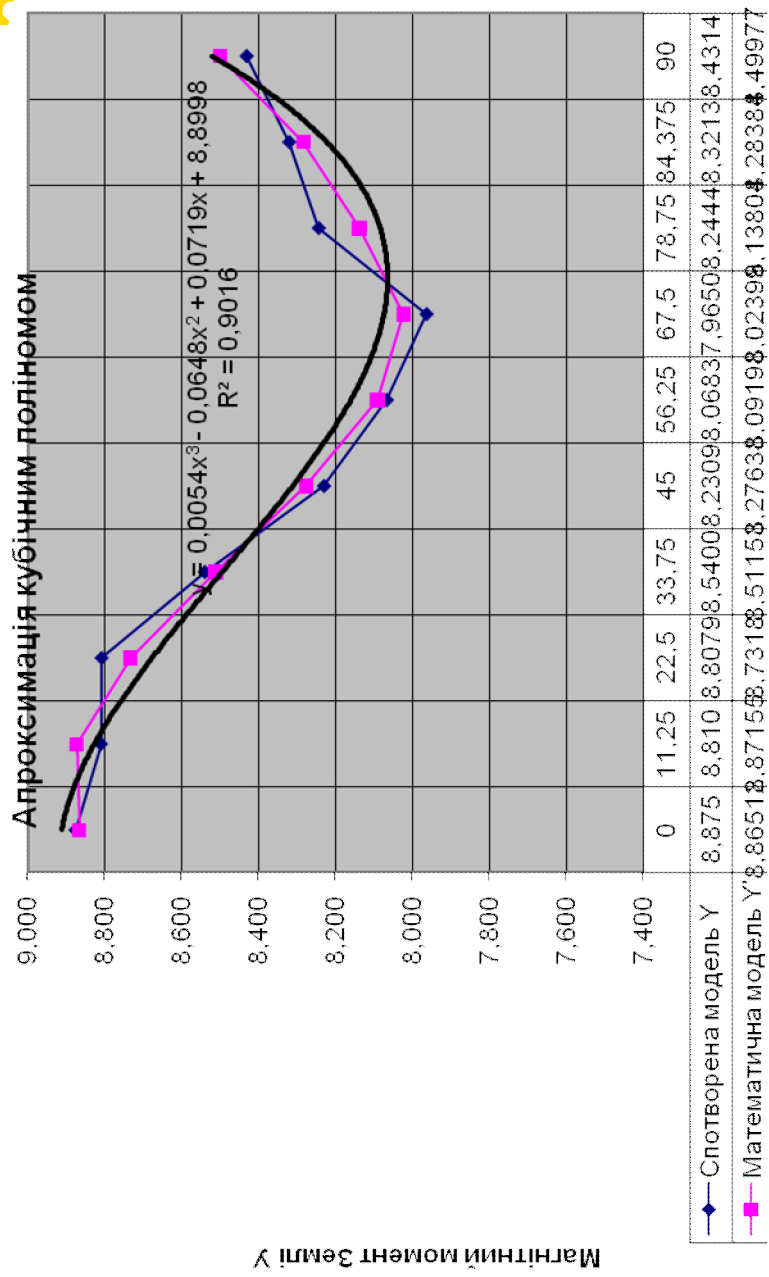
Середні квадратичні похибки зрівноваженої функції

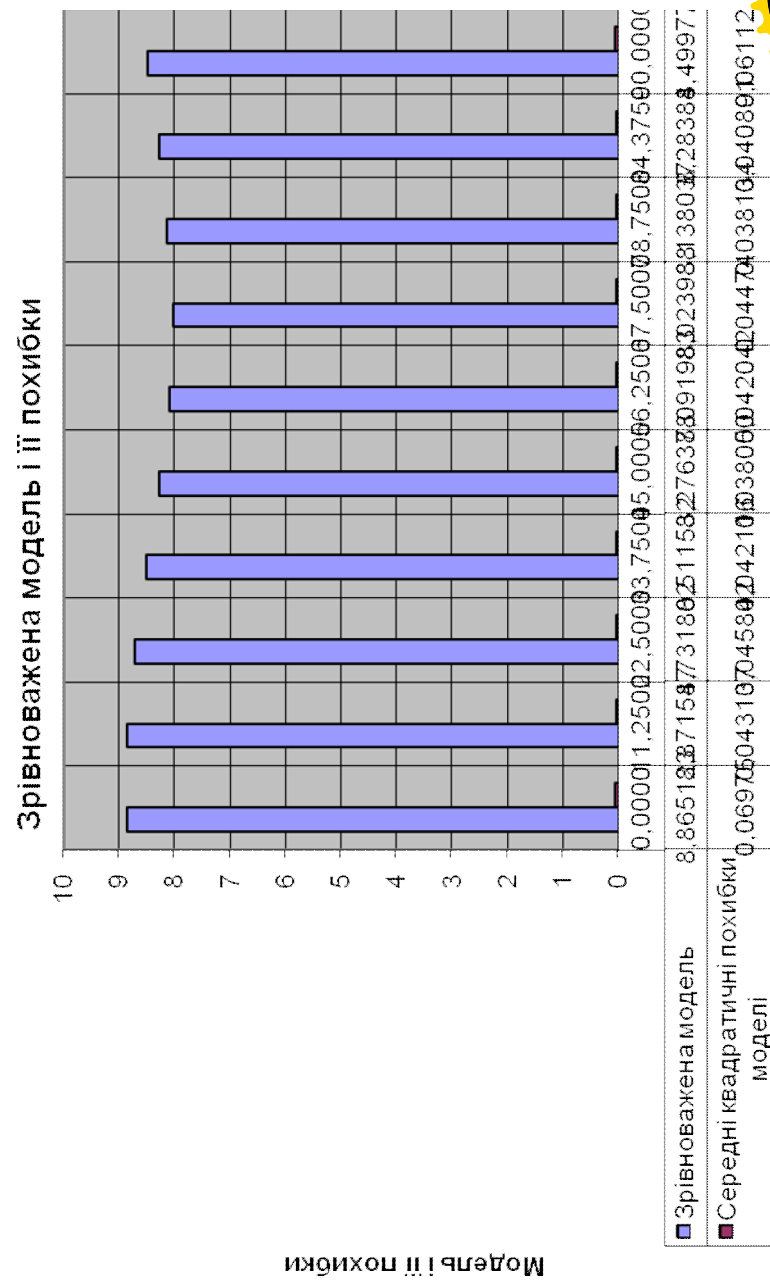
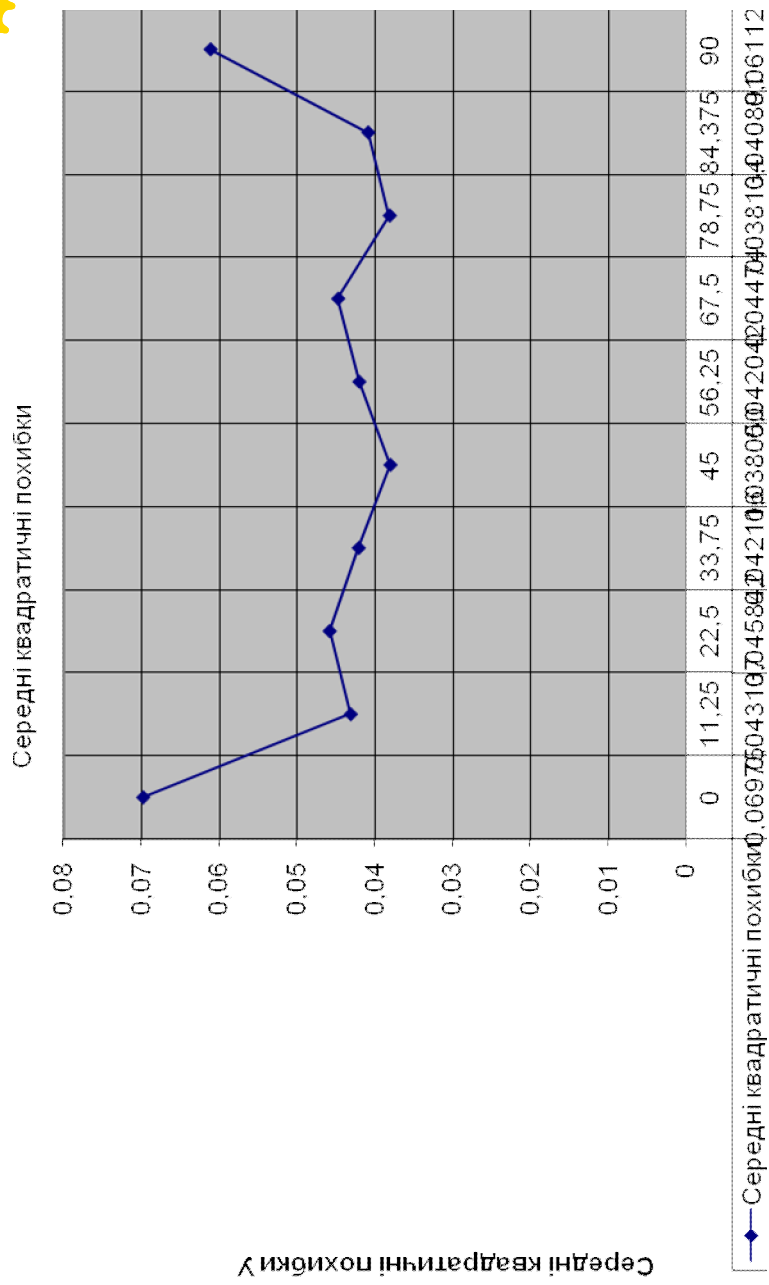
mφ=

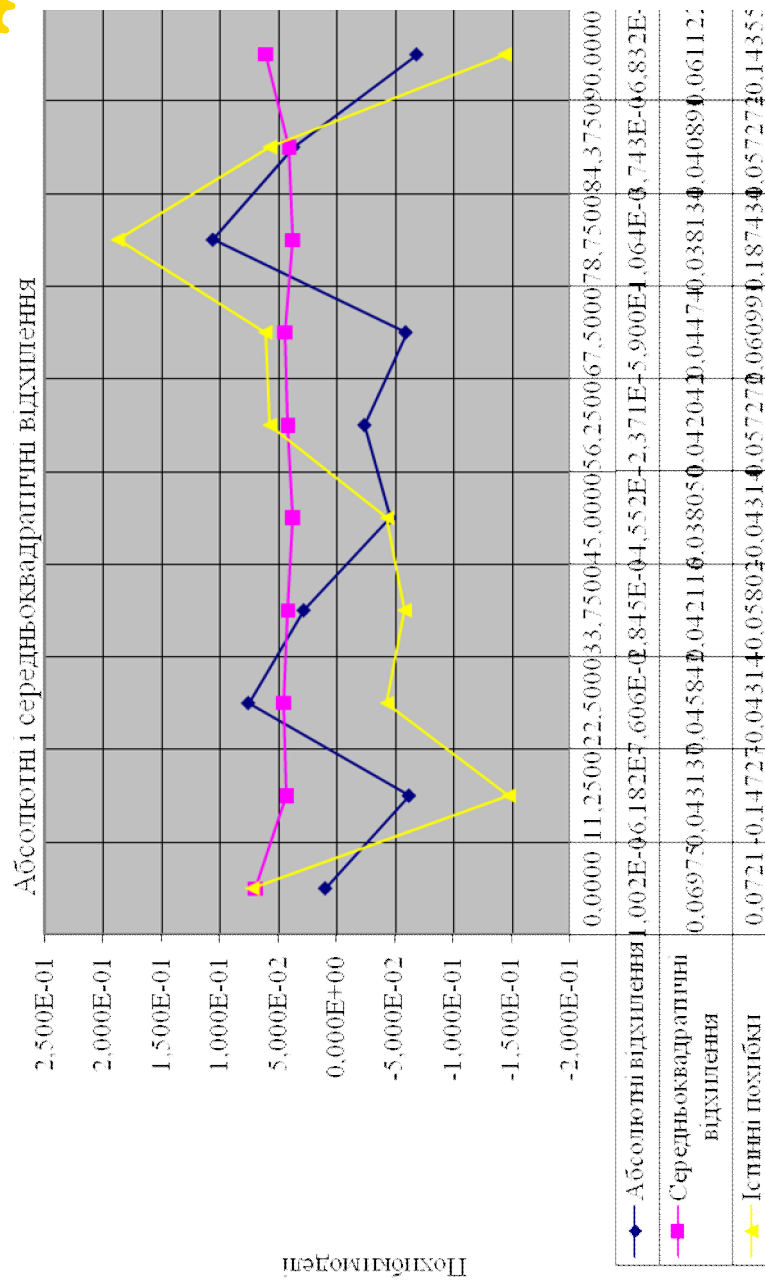
0,0697496
0,04313673
0,04584176
0,04211635
0,038050
0,0420424
0,04473986
0,03813419
0,04089106
0,06112177

Додаток 10. Діаграми досліджень

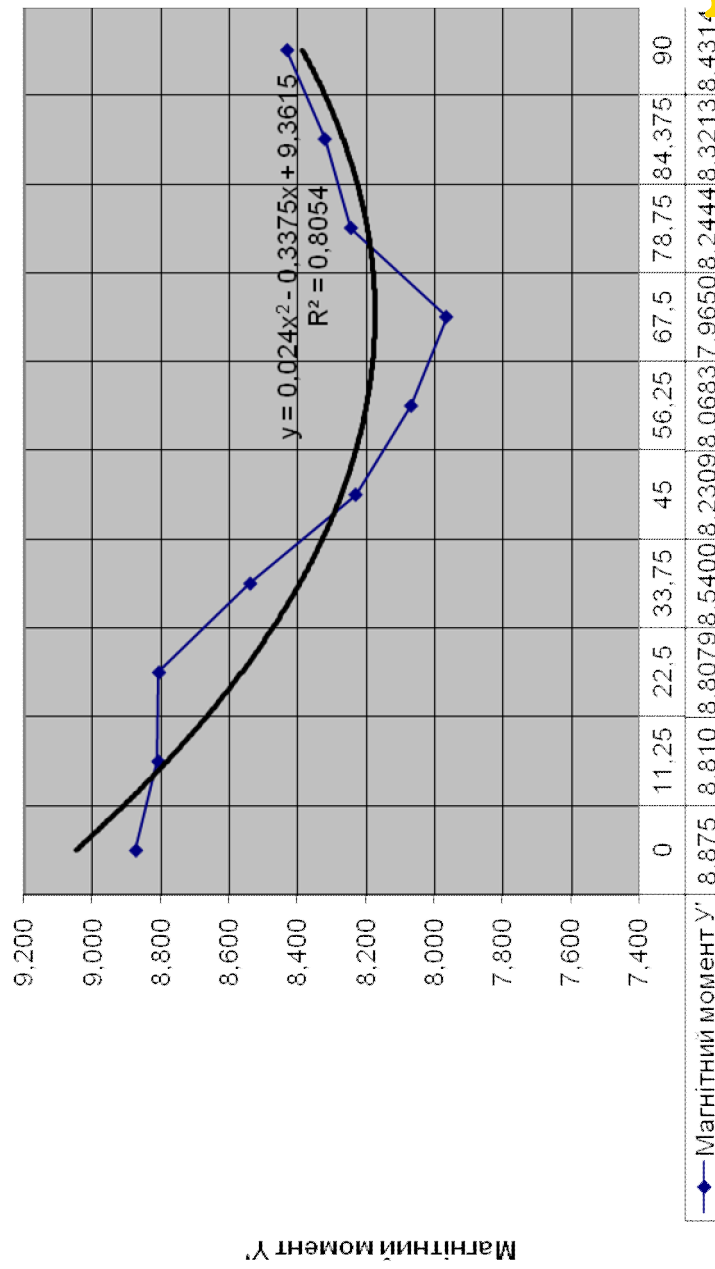




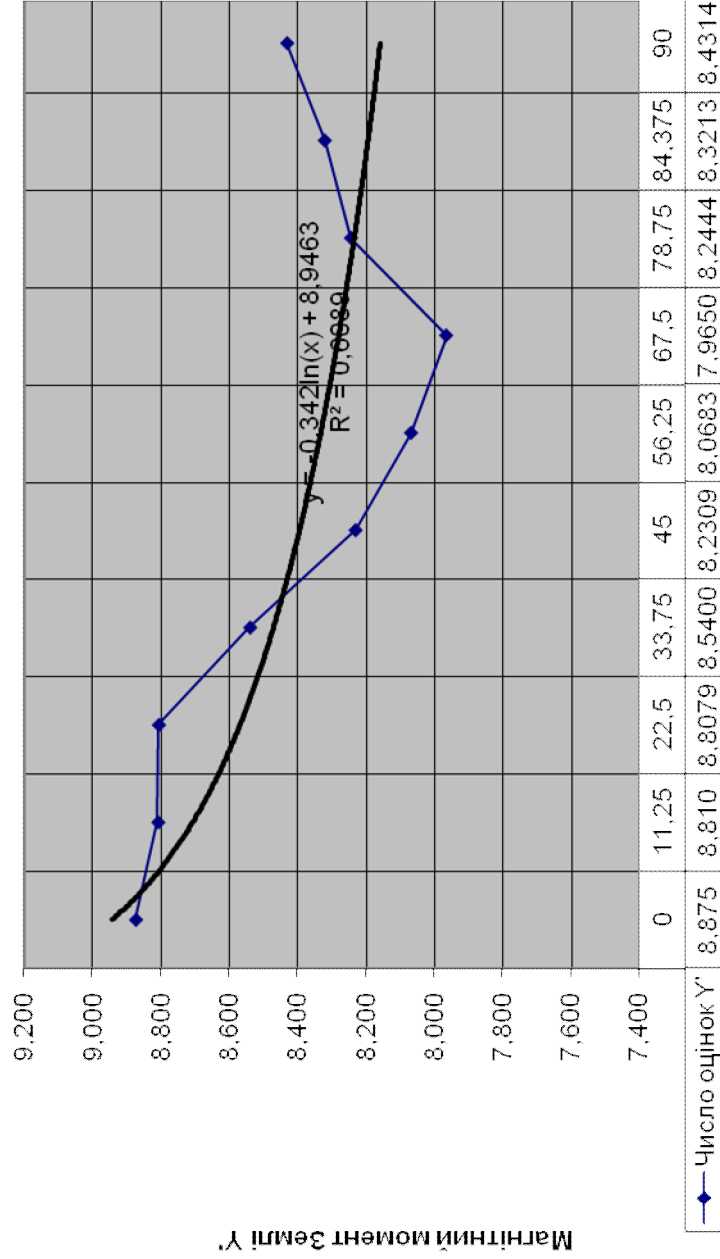




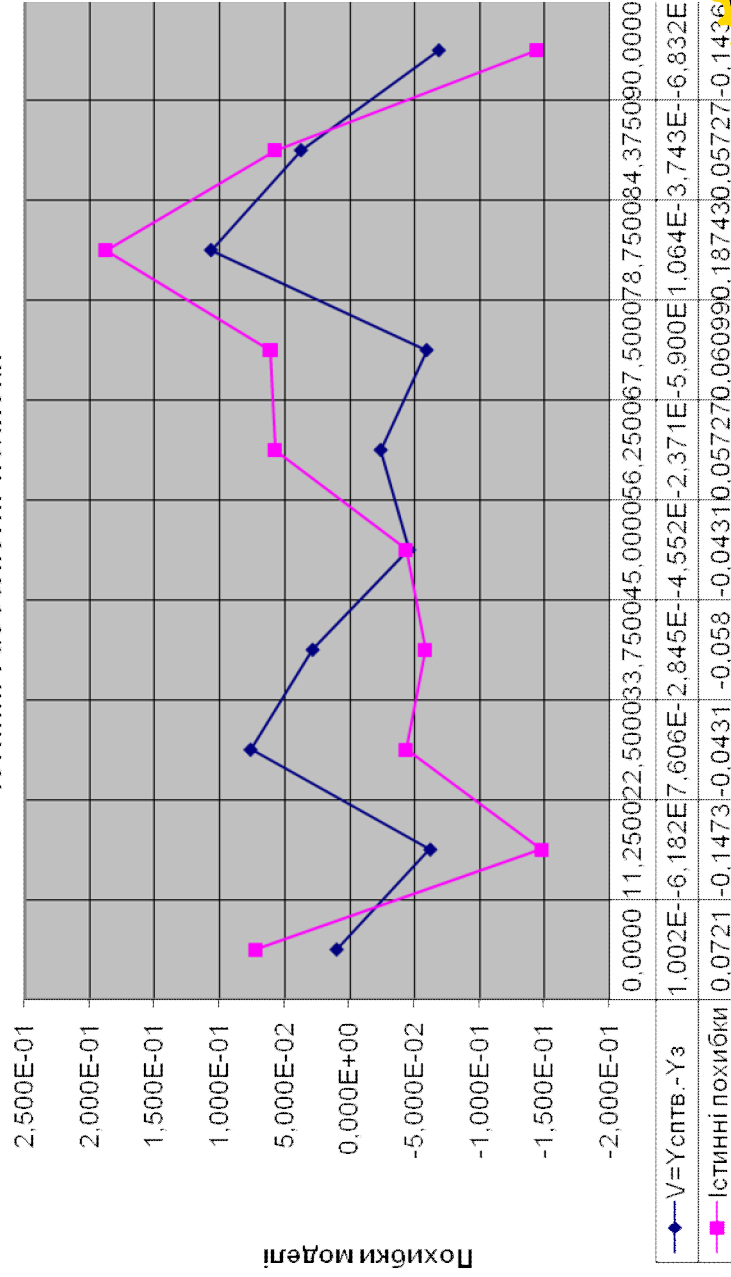
Апроксимація квадратичним поліномом

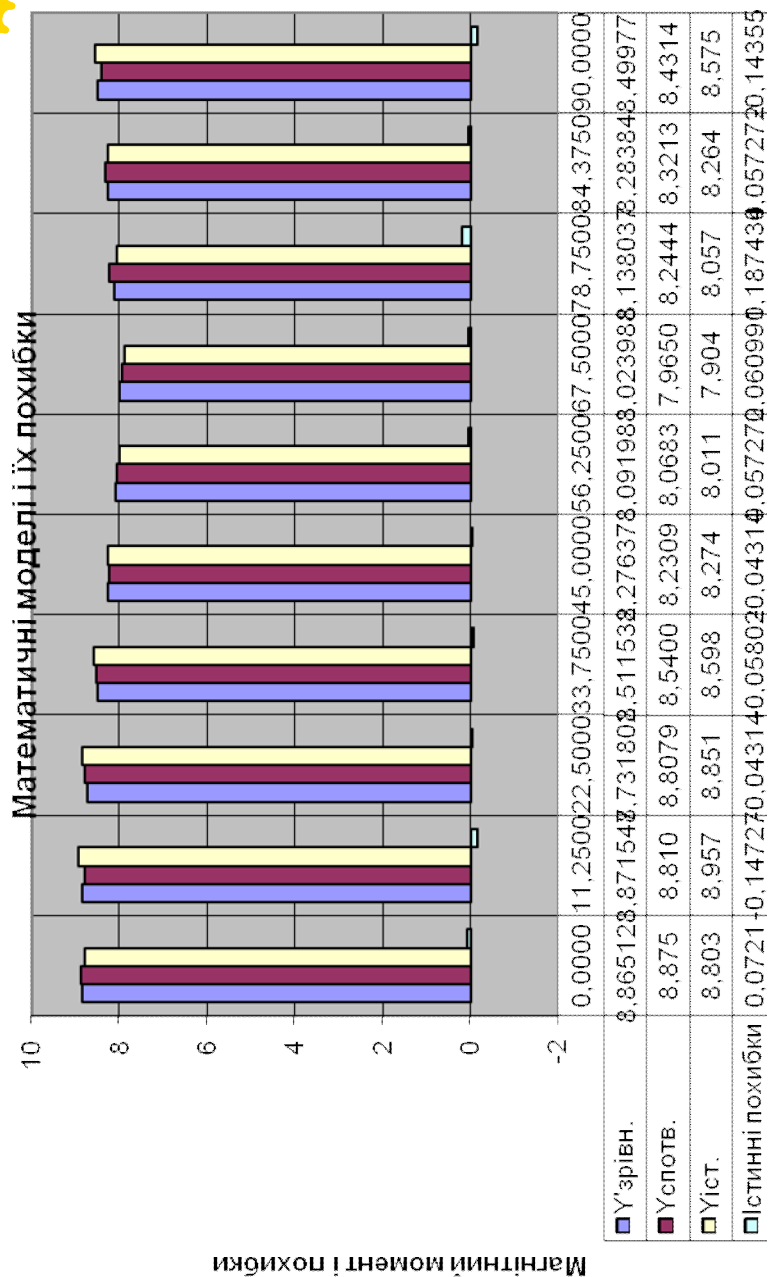


Апроксимация логарифмической функцией



Істинні і абсолютні похибки





Додаток 11. Таблиці Валецького О.О.

Variant No./ Random values

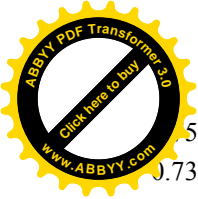
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
0.14	0.15	0.92	0.65	0.35	0.89	0.79	0.32	0.38	0.46	0.26	0.43	0.38	0.32	0.79	0.5
0.28	0.84	0.19	0.71	0.69	0.39	0.93	0.75	0.1	0.58	0.2	0.97	0.49	0.44	0.59	0.23
0.07	0.81	0.64	0.06	0.28	0.62	0.08	0.99	0.86	0.28	0.03	0.48	0.25	0.34	0.21	0.17
0.06	0.79	0.82	0.14	0.8	0.86	0.51	0.32	0.82	0.3	0.66	0.47	0.09	0.38	0.44	0.6
0.95	0.5	0.58	0.22	0.31	0.72	0.53	0.59	0.4	0.81	0.28	0.48	0.11	0.17	0.45	0.02
0.84	0.1	0.27	0.01	0.93	0.85	0.21	0.1	0.55	0.59	0.64	0.46	0.22	0.94	0.89	0.54
0.93	0.03	0.81	0.96	0.44	0.28	0.81	0.09	0.75	0.66	0.59	0.33	0.44	0.61	0.28	0.47
0.56	0.48	0.23	0.37	0.86	0.78	0.31	0.65	0.27	0.12	0.01	0.9	0.91	0.45	0.64	0.85
0.66	0.92	0.34	0.6	0.34	0.86	0.1	0.45	0.43	0.26	0.64	0.82	0.13	0.39	0.36	0.07
0.26	0.02	0.49	0.14	0.12	0.73	0.72	0.45	0.87	0	0.66	0.06	0.31	0.55	0.88	0.17

Variant No./ Random values

17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32
0.48	0.81	0.52	0.09	0.2	0.96	0.28	0.29	0.25	0.4	0.91	0.71	0.53	0.64	0.36	0.78
0.92	0.59	0.03	0.6	0.01	0.13	0.3	0.53	0.05	0.48	0.82	0.04	0.66	0.52	0.13	0.84
0.14	0.69	0.51	0.94	0.15	0.11	0.6	0.94	0.33	0.05	0.72	0.7	0.36	0.57	0.59	0.59
0.19	0.53	0.09	0.21	0.86	0.11	0.73	0.81	0.93	0.26	0.11	0.79	0.31	0.05	0.11	0.85
0.48	0.07	0.44	0.62	0.37	0.99	0.62	0.74	0.95	0.67	0.35	0.18	0.85	0.75	0.27	0.24
0.89	0.12	0.27	0.93	0.81	0.83	0.01	0.19	0.49	0.12	0.98	0.33	0.67	0.33	0.62	0.44
0.06	0.56	0.64	0.3	0.86	0.02	0.13	0.94	0.94	0.63	0.95	0.22	0.47	0.37	0.19	0.07
0.02	0.17	0.98	0.6	0.94	0.37	0.02	0.77	0.05	0.39	0.21	0.71	0.76	0.29	0.31	0.76
0.75	0.23	0.84	0.67	0.48	0.18	0.46	0.76	0.69	0.4	0.51	0.32	0	0.05	0.68	0.12
0.71	0.45	0.26	0.35	0.6	0.82	0.77	0.85	0.77	0.13	0.42	0.75	0.77	0.89	0.6	0.91

Variant No./ Random values

33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48
0.73	0.63	0.71	0.78	0.72	0.14	0.68	0.44	0.09	0.01	0.22	0.49	0.53	0.43	0.01	0.46
0.54	0.95	0.85	0.37	0.1	0.5	0.79	0.22	0.79	0.68	0.92	0.58	0.92	0.35	0.42	0.01
0.99	0.56	0.11	0.21	0.29	0.02	0.19	0.6	0.86	0.4	0.34	0.41	0.81	0.59	0.81	0.36
0.29	0.77	0.47	0.71	0.3	0.99	0.6	0.51	0.87	0.07	0.21	0.13	0.49	0.99	0.99	0.98
0.37	0.29	0.78	0.04	0.99	0.51	0.05	0.97	0.31	0.73	0.28	0.16	0.09	0.63	0.18	0.59
0.5	0.24	0.45	0.94	0.55	0.34	0.69	0.08	0.3	0.26	0.42	0.52	0.23	0.08	0.25	0.33
0.44	0.68	0.5	0.35	0.26	0.19	0.31	0.18	0.81	0.71	0.01	0	0.03	0.13	0.78	0.38



5 0.28 0.86 0.58 0.75 0.33 0.2 0.83 0.81 0.42 0.06 0.17 0.17 0.76 0.69 0.14
0.73 0.03 0.59 0.82 0.53 0.49 0.04 0.28 0.75 0.54 0.68 0.73 0.11 0.59 0.56 0.28
0.63 0.88 0.23 0.53 0.78 0.75 0.93 0.75 0.19 0.57 0.78 0.18 0.57 0.78 0.05 0.32

Variant No./ Random values

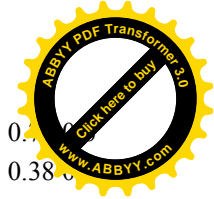
49 50 51 52 53 54 55 56 57 58 59 60 61 62 63 64
0.17 0.12 0.26 0.8 0.66 0.13 0 0.19 0.27 0.87 0.66 0.11 0.19 0.59 0.09 0.21
0.64 0.2 0.19 0.89 0.38 0.09 0.52 0.57 0.2 0.1 0.65 0.48 0.58 0.63 0.27 0.88
0.65 0.93 0.61 0.53 0.38 0.18 0.27 0.96 0.82 0.3 0.3 0.19 0.52 0.03 0.53 0.01
0.85 0.29 0.68 0.99 0.57 0.73 0.62 0.25 0.99 0.41 0.38 0.91 0.24 0.97 0.21 0.77
0.52 0.83 0.47 0.91 0.31 0.51 0.55 0.74 0.85 0.72 0.42 0.45 0.41 0.5 0.69 0.59
0.5 0.82 0.95 0.33 0.11 0.68 0.61 0.72 0.78 0.55 0.88 0.9 0.75 0.09 0.83 0.81
0.75 0.46 0.37 0.46 0.49 0.39 0.31 0.92 0.55 0.06 0.04 0 0.92 0.77 0.01 0.67
0.11 0.39 0 0.98 0.48 0.82 0.4 0.12 0.85 0.83 0.61 0.6 0.35 0.63 0.7 0.76
0.6 0.1 0.47 0.1 0.18 0.19 0.42 0.95 0.55 0.96 0.19 0.89 0.46 0.76 0.78 0.37
0.44 0.94 0.48 0.25 0.53 0.79 0.77 0.47 0.26 0.84 0.71 0.04 0.04 0.75 0.34 0.64

Variant No./ Random values

65 66 67 68 69 70 71 72 73 74 75 76 77 78 79 80
0.62 0.08 0.04 0.66 0.84 0.25 0.9 0.69 0.49 0.12 0.93 0.31 0.36 0.77 0.02 0.89
0.89 0.15 0.21 0.04 0.75 0.21 0.62 0.05 0.69 0.66 0.02 0.4 0.58 0.03 0.81 0.5
0.19 0.35 0.11 0.25 0.33 0.82 0.43 0 0.35 0.58 0.76 0.4 0.24 0.74 0.96 0.47
0.32 0.63 0.91 0.41 0.99 0.27 0.26 0.04 0.26 0.99 0.22 0.79 0.67 0.82 0.35 0.47
0.81 0.63 0.6 0.09 0.34 0.17 0.21 0.64 0.12 0.19 0.92 0.45 0.86 0.31 0.5 0.3
0.28 0.61 0.82 0.97 0.45 0.55 0.7 0.67 0.49 0.83 0.85 0.05 0.49 0.45 0.88 0.58
0.69 0.26 0.99 0.56 0.9 0.92 0.72 0.1 0.79 0.75 0.09 0.3 0.29 0.55 0.32 0.11
0.65 0.34 0.49 0.87 0.2 0.27 0.55 0.96 0.02 0.36 0.48 0.06 0.65 0.49 0.91 0.19
0.88 0.18 0.34 0.79 0.77 0.53 0.56 0.63 0.69 0.8 0.74 0.26 0.54 0.25 0.27 0.86
0.25 0.51 0.81 0.84 0.17 0.57 0.46 0.72 0.89 0.09 0.77 0.77 0.27 0.93 0.8 0

Variant No./ Random values

81 82 83 84 85 86 87 88 89 90 91 92 93 94 95 96
0.81 0.64 0.7 0.6 0.01 0.61 0.45 0.24 0.91 0.92 0.17 0.32 0.17 0.21 0.47 0.72
0.35 0.01 0.41 0.44 0.19 0.73 0.56 0.85 0.48 0.16 0.13 0.61 0.15 0.73 0.52 0.55
0.21 0.33 0.47 0.57 0.41 0.84 0.94 0.68 0.43 0.85 0.23 0.32 0.39 0.07 0.39 0.41
0.43 0.33 0.45 0.47 0.76 0.24 0.16 0.86 0.25 0.18 0.98 0.35 0.69 0.48 0.55 0.62
0.09 0.92 0.19 0.22 0.21 0.84 0.27 0.25 0.5 0.25 0.42 0.56 0.88 0.76 0.71 0.79



0.04 0.94 0.6 0.16 0.53 0.46 0.68 0.04 0.98 0.86 0.27 0.23 0.27 0.91 0
0.85 0.78 0.43 0.83 0.82 0.79 0.67 0.97 0.66 0.81 0.45 0.41 0 0.95 0.38
0.78 0.63 0.6 0.95 0.06 0.8 0.06 0.42 0.25 0.12 0.52 0.05 0.11 0.73 0.92 0.98
0.48 0.96 0.08 0.41 0.28 0.48 0.86 0.26 0.94 0.56 0.04 0.24 0.19 0.65 0.28 0.5
0.22 0.21 0.06 0.61 0.18 0.63 0.06 0.74 0.42 0.78 0.62 0.2 0.39 0.19 0.49 0.45

Variant No./ Random values

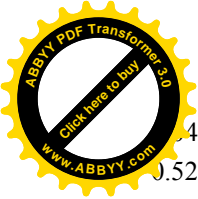
97 98 99 100 101 102 103 104 105 106 107 108 109 110 111 112
0.04 0.71 0.23 0.71 0.37 0.86 0.96 0.09 0.56 0.36 0.43 0.71 0.91 0.72 0.87 0.46
0.77 0.64 0.65 0.75 0.73 0.96 0.24 0.13 0.89 0.08 0.65 0.83 0.26 0.45 0.99 0.58
0.13 0.39 0.04 0.78 0.02 0.75 0.9 0.09 0.94 0.65 0.76 0.4 0.78 0.95 0.12 0.69
0.46 0.83 0.98 0.35 0.25 0.95 0.7 0.98 0.25 0.82 0.26 0.2 0.52 0.24 0.89 0.4
0.77 0.26 0.71 0.94 0.78 0.26 0.84 0.82 0.6 0.14 0.76 0.99 0.09 0.02 0.64 0.01
0.36 0.39 0.44 0.37 0.45 0.53 0.05 0.06 0.82 0.03 0.49 0.62 0.52 0.45 0.17 0.49
0.39 0.96 0.51 0.43 0.14 0.29 0.8 0.91 0.9 0.65 0.92 0.5 0.93 0.72 0.21 0.69
0.64 0.61 0.51 0.57 0.09 0.85 0.83 0.87 0.41 0.05 0.97 0.88 0.59 0.59 0.77 0.29
0.75 0.49 0.89 0.3 0.16 0.17 0.53 0.92 0.84 0.68 0.13 0.82 0.68 0.68 0.38 0.68
0.94 0.27 0.74 0.15 0.59 0.91 0.85 0.59 0.25 0.24 0.59 0.53 0.95 0.94 0.31 0.04

Variant No./ Random values

113 114 115 116 117 118 119 120 121 122 123 124 125 126 127 128
0.99 0.72 0.52 0.46 0.8 0.84 0.59 0.87 0.27 0.36 0.44 0.69 0.58 0.48 0.65 0.38
0.36 0.73 0.62 0.22 0.62 0.6 0.99 0.12 0.46 0.08 0.05 0.12 0.43 0.88 0.43 0.9
0.45 0.12 0.44 0.13 0.65 0.49 0.76 0.27 0.8 0.79 0.77 0.15 0.69 0.14 0.35 0.99
0.77 0 0.12 0.96 0.16 0.08 0.94 0.41 0.69 0.48 0.68 0.55 0.58 0.48 0.4 0.63
0.53 0.42 0.2 0.72 0.22 0.58 0.28 0.48 0.86 0.48 0.15 0.84 0.56 0.02 0.85 0.06
0.01 0.68 0.42 0.73 0.94 0.52 0.26 0.74 0.67 0.67 0.88 0.95 0.25 0.21 0.38 0.52
0.25 0.49 0.95 0.46 0.66 0.72 0.78 0.23 0.98 0.64 0.56 0.59 0.61 0.16 0.35 0.48
0.86 0.23 0.05 0.77 0.45 0.64 0.98 0.03 0.55 0.93 0.63 0.45 0.68 0.17 0.43 0.24
0.11 0.25 0.15 0.07 0.6 0.69 0.47 0.94 0.51 0.09 0.65 0.96 0.09 0.4 0.25 0.22
0.88 0.79 0.71 0.08 0.93 0.14 0.56 0.69 0.13 0.68 0.67 0.22 0.87 0.48 0.94 0.05

Variant No./ Random values

129 130 131 132 133 134 135 136 137 138 139 140 141 142 143 144
0.6 0.1 0.15 0.03 0.3 0.86 0.17 0.92 0.86 0.8 0.92 0.08 0.74 0.76 0.09 0.17
0.82 0.49 0.38 0.58 0.9 0.09 0.71 0.49 0.09 0.67 0.59 0.85 0.26 0.13 0.65 0.54
0.97 0.81 0.89 0.31 0.29 0.78 0.48 0.21 0.68 0.29 0.98 0.94 0.87 0.22 0.65 0.88



0.4 0.85 0.75 0.64 0.01 0.42 0.7 0.47 0.75 0.55 0.13 0.23 0.79 0.64 0.14 0.51
 0.52 0.37 0.46 0.23 0.43 0.64 0.54 0.28 0.58 0.44 0.47 0.95 0.26 0.58 0.67 0.82
 0.1 0.51 0.14 0.13 0.54 0.73 0.57 0.39 0.52 0.31 0.13 0.42 0.71 0.66 0.1 0.21
 0.35 0.96 0.95 0.36 0.23 0.14 0.42 0.95 0.24 0.84 0.93 0.71 0.87 0.11 0.01 0.45
 0.76 0.54 0.03 0.59 0.02 0.79 0.93 0.44 0.03 0.74 0.2 0.07 0.31 0.05 0.78 0.53
 0.9 0.62 0.19 0.83 0.87 0.44 0.78 0.08 0.47 0.84 0.89 0.68 0.33 0.21 0.44 0.57
 0.13 0.86 0.87 0.51 0.94 0.35 0.06 0.43 0.02 0.18 0.45 0.31 0.91 0.04 0.84 0.81

Variant No./ Random values

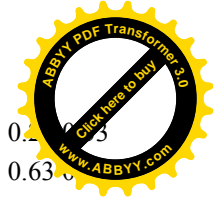
145 146 147 148 149 150 151 152 153 154 155 156 157 158 159 160
 0 0.53 0.7 0.61 0.46 0.8 0.67 0.49 0.19 0.27 0.81 0.91 0.19 0.79 0.39 0.95
 0.2 0.61 0.41 0.96 0.63 0.42 0.87 0.54 0.44 0.06 0.43 0.74 0.51 0.23 0.71 0.81
 0.92 0.17 0.99 0.98 0.39 0.1 0.15 0.91 0.95 0.61 0.81 0.46 0.75 0.14 0.26 0.91
 0.23 0.97 0.48 0.94 0.09 0.07 0.18 0.64 0.94 0.23 0.19 0.61 0.56 0.79 0.45 0.2
 0.8 0.95 0.14 0.65 0.5 0.22 0.52 0.31 0.6 0.38 0.81 0.93 0.01 0.42 0.09 0.37
 0.62 0.13 0.78 0.55 0.95 0.66 0.38 0.93 0.77 0.87 0.08 0.3 0.39 0.06 0.97 0.92
 0.07 0.73 0.46 0.72 0.21 0.82 0.56 0.25 0.99 0.66 0.15 0.01 0.42 0.15 0.03 0.06
 0.8 0.38 0.44 0.77 0.34 0.54 0.92 0.02 0.6 0.54 0.14 0.66 0.59 0.25 0.2 0.14
 0.97 0.44 0.28 0.5 0.73 0.25 0.18 0.66 0.6 0.02 0.13 0.24 0.34 0.08 0.81 0.9
 0.71 0.04 0.86 0.33 0.17 0.34 0.64 0.96 0.51 0.45 0.39 0.05 0.79 0.62 0.68 0.56

Variant No./ Random values

161 162 163 164 165 166 167 168 169 170 171 172 173 174 175 176
 0.1 0.05 0.5 0.81 0.06 0.65 0.87 0.96 0.99 0.81 0.63 0.57 0.47 0.36 0.38 0.4
 0.52 0.57 0.14 0.59 0.1 0.28 0.97 0.06 0.41 0.4 0.11 0.09 0.71 0.2 0.62 0.8
 0.43 0.9 0.39 0.75 0.95 0.15 0.67 0.71 0.57 0.7 0.04 0.2 0.33 0.78 0.69 0.93
 0.6 0.07 0.23 0.05 0.58 0.76 0.31 0.76 0.35 0.94 0.21 0.87 0.31 0.25 0.14 0.71
 0.2 0.53 0.29 0.28 0.19 0.18 0.26 0.18 0.61 0.25 0.86 0.73 0.21 0.57 0.91 0.98
 0.41 0.48 0.48 0.82 0.91 0.64 0.47 0.06 0.09 0.57 0.52 0.7 0.69 0.57 0.22 0.09
 0.17 0.56 0.71 0.16 0.72 0.29 0.1 0.98 0.16 0.9 0.91 0.52 0.8 0.17 0.35 0.06
 0.71 0.27 0.48 0.58 0.32 0.22 0.87 0.18 0.35 0.2 0.93 0.53 0.96 0.57 0.25 0.12
 0.1 0.83 0.57 0.91 0.51 0.36 0.98 0.82 0.09 0.14 0.44 0.21 0 0.67 0.51 0.03
 0.34 0.67 0.11 0.03 0.14 0.12 0.67 0.11 0.13 0.69 0.9 0.86 0.58 0.51 0.63 0.98

Variant No./ Random values

177 178 179 180 181 182 183 184 185 186 187 188 189 190 191 192
 0.31 0.5 0.19 0.7 0.16 0.51 0.51 0.16 0.85 0.17 0.14 0.37 0.65 0.76 0.18 0.35



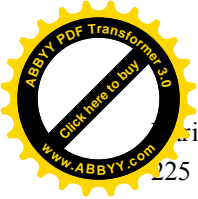
0.15 0.56 0.5 0.88 0.49 0.09 0.98 0.98 0.59 0.98 0.23 0.87 0.34 0.55 0.2
 0.16 0.35 0.5 0.76 0.47 0.91 0.85 0.35 0.89 0.32 0.26 0.18 0.54 0.89 0.63
 0.32 0.93 0.3 0.89 0.85 0.7 0.64 0.2 0.46 0.75 0.25 0.9 0.7 0.91 0.54 0.81
 0.41 0.65 0.49 0.85 0.94 0.61 0.63 0.71 0.8 0.27 0.09 0.81 0.99 0.43 0.09 0.92
 0.44 0.88 0.95 0.75 0.71 0.28 0.28 0.9 0.59 0.23 0.23 0.32 0.6 0.97 0.29 0.97
 0.12 0.08 0.44 0.33 0.57 0.32 0.65 0.48 0.93 0.82 0.39 0.11 0.93 0.25 0.97 0.46
 0.36 0.67 0.3 0.58 0.36 0.04 0.14 0.28 0.13 0.88 0.3 0.32 0.03 0.82 0.49 0.03
 0.75 0.89 0.85 0.24 0.37 0.44 0.17 0.02 0.91 0.32 0.76 0.56 0.18 0.09 0.37 0.73
 0.44 0.4 0.3 0.7 0.74 0.69 0.21 0.12 0.01 0.91 0.3 0.2 0.33 0.03 0.8 0.19

Variant No./ Random values

193 194 195 196 197 198 199 200 201 202 203 204 205 206 207 208
 0.76 0.21 0.1 0.11 0 0.44 0.92 0.93 0.21 0.51 0.6 0.84 0.24 0.44 0.85 0.96
 0.37 0.66 0.98 0.38 0.95 0.22 0.86 0.84 0.78 0.31 0.23 0.55 0.26 0.58 0.21 0.31
 0.44 0.95 0.76 0.85 0.72 0.62 0.43 0.34 0.41 0.89 0.3 0.39 0.68 0.64 0.26 0.24
 0.34 0.1 0.77 0.32 0.26 0.97 0.8 0.28 0.07 0.31 0.89 0.15 0.44 0.11 0.01 0.04
 0.46 0.82 0.32 0.52 0.71 0.62 0.01 0.05 0.26 0.52 0.27 0.21 0.11 0.66 0.03 0.96
 0.66 0.55 0.73 0.09 0.25 0.47 0.11 0.05 0.57 0.85 0.37 0.63 0.46 0.68 0.2 0.65
 0.31 0.09 0.89 0.65 0.26 0.91 0.86 0.2 0.56 0.47 0.69 0.31 0.25 0.7 0.58 0.63
 0.56 0.62 0.01 0.85 0.58 0.1 0.07 0.29 0.36 0.06 0.59 0.87 0.64 0.86 0.11 0.79
 0.1 0.45 0.33 0.48 0.85 0.03 0.46 0.11 0.36 0.57 0.68 0.67 0.53 0.24 0.94 0.41
 0.66 0.8 0.39 0.62 0.65 0.79 0.78 0.77 0.18 0.55 0.6 0.84 0.55 0.29 0.65 0.41

Variant No./ Random values

209 210 211 212 213 214 215 216 217 218 219 220 221 222 223 224
 0.26 0.65 0.4 0.85 0.3 0.61 0.43 0.44 0.43 0.18 0.58 0.67 0.69 0.75 0.14 0.56
 0.61 0.4 0.68 0 0.7 0.02 0.37 0.87 0.76 0.59 0.13 0.44 0.01 0.71 0.27 0.49
 0.47 0.04 0.2 0.56 0.22 0.3 0.53 0.89 0.94 0.56 0.13 0.14 0.07 0.11 0.27 0
 0.04 0.07 0.85 0.47 0.33 0.26 0.99 0.39 0.08 0.14 0.54 0.66 0.46 0.45 0.88 0.07
 0.97 0.27 0.08 0.26 0.68 0.3 0.63 0.43 0.28 0.58 0.78 0.56 0.98 0.3 0.52 0.35
 0.8 0.89 0.33 0.06 0.57 0.57 0.4 0.67 0.95 0.45 0.71 0.63 0.77 0.52 0.54 0.2
 0.21 0.14 0.95 0.57 0.61 0.58 0.14 0 0.25 0.01 0.26 0.22 0.85 0.94 0.13 0.02
 0.16 0.47 0.15 0.5 0.97 0.92 0.59 0.23 0.09 0.9 0.79 0.65 0.47 0.37 0.61 0.25
 0.51 0.76 0.56 0.75 0.13 0.57 0.51 0.78 0.29 0.66 0.64 0.54 0.77 0.91 0.74 0.5
 0.11 0.29 0.96 0.14 0.89 0.03 0.04 0.63 0.99 0.47 0.13 0.29 0.62 0.1 0.73 0.4



Variant No./ Random values

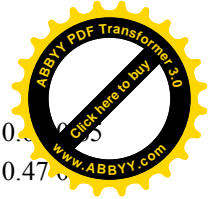
225 226 227 228 229 230 231 232 233 234 235 236 237 238 239 240
0.43 0.75 0.18 0.95 0.73 0.59 0.61 0.45 0.89 0.01 0.93 0.89 0.71 0.31 0.11 0.79
0.04 0.29 0.78 0.28 0.56 0.47 0.5 0.32 0.03 0.19 0.86 0.91 0.51 0.4 0.28 0.7
0.8 0.85 0.99 0.04 0.8 0.1 0.94 0.12 0.14 0.72 0.21 0.31 0.79 0.47 0.64 0.77
0.72 0.62 0.24 0.14 0.25 0.48 0.54 0.54 0.03 0.32 0.15 0.71 0.85 0.3 0.61 0.42
0.28 0.81 0.37 0.58 0.5 0.43 0.06 0.33 0.21 0.75 0.18 0.29 0.79 0.86 0.62 0.23
0.71 0.72 0.15 0.91 0.6 0.77 0.16 0.69 0.25 0.47 0.48 0.73 0.89 0.86 0.65 0.49
0.49 0.45 0.01 0.14 0.65 0.4 0.62 0.84 0.33 0.66 0.39 0.37 0.9 0.03 0.97 0.69
0.26 0.56 0.72 0.14 0.63 0.85 0.3 0.67 0.36 0.09 0.65 0.71 0.2 0.91 0.8 0.76
0.38 0.32 0.71 0.66 0.41 0.62 0.74 0.88 0.88 0 0.78 0.69 0.25 0.6 0.29 0.02
0.28 0.47 0.21 0.04 0.03 0.17 0.21 0.18 0.6 0.82 0.04 0.19 0 0.04 0.22 0.96

Variant No./ Random values

241 242 243 244 245 246 247 248 249 250 251 252 253 254 255 256
0.61 0.71 0.19 0.63 0.77 0.92 0.13 0.37 0.57 0.51 0.14 0.95 0.95 0.01 0.56 0.6
0.49 0.63 0.18 0.62 0.94 0.72 0.65 0.47 0.36 0.42 0.52 0.3 0.81 0.77 0.03 0.67
0.51 0.59 0.06 0.73 0.5 0.23 0.5 0.72 0.83 0.54 0.05 0.67 0.04 0.03 0.86 0.74
0.35 0.13 0.62 0.22 0.24 0.77 0.15 0.89 0.15 0.04 0.95 0.3 0.98 0.44 0.48 0.93
0.33 0.09 0.63 0.4 0.87 0.8 0.76 0.93 0.25 0.99 0.39 0.78 0.05 0.41 0.93 0.41
0.44 0.73 0.77 0.44 0.18 0.42 0.63 0.12 0.98 0.6 0.8 0.99 0.88 0.86 0.87 0.41
0.32 0.6 0.47 0.21 0.56 0.95 0.16 0.23 0.96 0.58 0.64 0.57 0.3 0.21 0.63 0.15
0.98 0.19 0.31 0.95 0.16 0.73 0.53 0.81 0.29 0.74 0.16 0.77 0.29 0.47 0.86 0.72
0.42 0.29 0.24 0.65 0.43 0.66 0.8 0.09 0.8 0.67 0.69 0.28 0.23 0.82 0.8 0.68
0.99 0.64 0 0.48 0.24 0.35 0.4 0.37 0.01 0.41 0.63 0.14 0.96 0.58 0.97 0.94

Variant No./ Random values

257 258 259 260 261 262 263 264 265 266 267 268 269 270 271 272
0.09 0.24 0.32 0.37 0.89 0.69 0.07 0.06 0.97 0.79 0.42 0.23 0.62 0.5 0.82 0.21
0.68 0.89 0.57 0.38 0.37 0.98 0.62 0.3 0.01 0.59 0.37 0.76 0.47 0.16 0.51 0.22
0.89 0.35 0.78 0.6 0.15 0.88 0.16 0.17 0.55 0.78 0.29 0.73 0.52 0.33 0.44 0.6
0.42 0.81 0.51 0.26 0.27 0.2 0.37 0.34 0.31 0.46 0.53 0.19 0.77 0.77 0.41 0.6
0.31 0.99 0.06 0.65 0.54 0.18 0.76 0.39 0.79 0.29 0.33 0.44 0.19 0.52 0.15 0.41
0.34 0.18 0.99 0.48 0.54 0.44 0.73 0.45 0.67 0.38 0.31 0.62 0.49 0.93 0.41 0.91
0.31 0.81 0.48 0.09 0.27 0.77 0.71 0.03 0.86 0.38 0.77 0.34 0.31 0.77 0.2 0.75
0.45 0.65 0.45 0.32 0.2 0.77 0.7 0.92 0.12 0.01 0.9 0.51 0.66 0.09 0.62 0.8



0.49 0.09 0.26 0.36 0.01 0.97 0.59 0.88 0.28 0.16 0.13 0.32 0.31 0.66 0.0
0.28 0.61 0.93 0.26 0.68 0.63 0.36 0.06 0.27 0.35 0.67 0.63 0.03 0.54 0.47

Variant No./ Random values

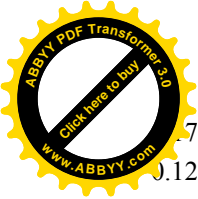
273 274 275 276 277 278 279 280 281 282 283 284 285 286 287 288
0.28 0.03 0.5 0.45 0.07 0.77 0.23 0.55 0.47 0.1 0.58 0.59 0.54 0.87 0.02 0.79
0.08 0.14 0.35 0.62 0.4 0.14 0.51 0.71 0.8 0.62 0.46 0.43 0.62 0.67 0.94 0.56
0.12 0.75 0.31 0.81 0.34 0.07 0.83 0.3 0.33 0.62 0.54 0.23 0.27 0.83 0.94 0.49
0.75 0.38 0.24 0.37 0.2 0.58 0.35 0.31 0.14 0.77 0.11 0.99 0.26 0.06 0.38 0.13
0.34 0.67 0.76 0.87 0.96 0.95 0.97 0.03 0.09 0.83 0.39 0.13 0.07 0.71 0.09 0.87
0.04 0.08 0.59 0.13 0.37 0.46 0.41 0.44 0.28 0.22 0.77 0.26 0.34 0.65 0.94 0.7
0.47 0.45 0.87 0.84 0.77 0.87 0.2 0.19 0.27 0.71 0.52 0.8 0.73 0.17 0.67 0.9
0.77 0.07 0.15 0.72 0.13 0.44 0.47 0.3 0.6 0.57 0 0.73 0.34 0.92 0.43 0.69
0.31 0.13 0.83 0.5 0.49 0.31 0.63 0.12 0.84 0.04 0.25 0.12 0.19 0.25 0.65 0.17
0.98 0.06 0.94 0.11 0.35 0.28 0.01 0.31 0.47 0.01 0.3 0.47 0.81 0.64 0.37 0.88

Variant No./ Random values

289 290 291 292 293 294 295 296 297 298 299 300 301 302 303 304
0.51 0.85 0.29 0.09 0.28 0.54 0.52 0.01 0.16 0.58 0.39 0.34 0.19 0.65 0.62 0.13
0.49 0.14 0.34 0.15 0.95 0.62 0.58 0.65 0.86 0.55 0.7 0.55 0.26 0.9 0.49 0.65
0.2 0.98 0.58 0.03 0.38 0.5 0.72 0.24 0.26 0.48 0.29 0.39 0.72 0.85 0.84 0.78
0.31 0.63 0.05 0.77 0.77 0.56 0.06 0.88 0.87 0.64 0.46 0.24 0.82 0.46 0.85 0.79
0.26 0.03 0.95 0.35 0.27 0.73 0.48 0.03 0.04 0.8 0.29 0 0.58 0.76 0.07 0.58
0.25 0.1 0.47 0.47 0.09 0.16 0.43 0.96 0.13 0.62 0.67 0.6 0.44 0.92 0.56 0.27
0.42 0.04 0.2 0.83 0.2 0.85 0.66 0.11 0.9 0.62 0.54 0.54 0.33 0.72 0.13 0.15
0.35 0.95 0.84 0.5 0.68 0.77 0.24 0.6 0.29 0.01 0.61 0.87 0.66 0.79 0.52 0.4
0.61 0.63 0.42 0.52 0.25 0.77 0.19 0.54 0.29 0.16 0.29 0.91 0.93 0.06 0.45 0.53
0.77 0.99 0.14 0.03 0.73 0.4 0.43 0.28 0.75 0.26 0.28 0.88 0.96 0.39 0.95 0.87

Variant No./ Random values

305 306 307 308 309 310 311 312 313 314 315 316 317 318 319 320
0.94 0.75 0.72 0.91 0.74 0.64 0.26 0.35 0.74 0.55 0.25 0.4 0.79 0.09 0.14 0.51
0.35 0.71 0.11 0.36 0.94 0.1 0.91 0.19 0.39 0.32 0.51 0.91 0.07 0.6 0.2 0.82
0.52 0.02 0.61 0.87 0.98 0.53 0.18 0.87 0.7 0.58 0.42 0.97 0.25 0.91 0.67 0.78
0.13 0.14 0.96 0.99 0 0.9 0.19 0.21 0.16 0.97 0.17 0.37 0.27 0.84 0.76 0.84
0.72 0.68 0.6 0.84 0.9 0.03 0.37 0.7 0.24 0.24 0.29 0.16 0.51 0.3 0.05 0
0.51 0.68 0.32 0.33 0.64 0.35 0.03 0.89 0.51 0.7 0.29 0.89 0.39 0.22 0.33 0.45



0.7 0.22 0.01 0.38 0.12 0.8 0.69 0.65 0.01 0.17 0.84 0.4 0.87 0.45 0.19 0.6
0.12 0.12 0.28 0.59 0.93 0.71 0.62 0.31 0.3 0.17 0.11 0.44 0.48 0.46 0.4 0.9
0.38 0.9 0.64 0.49 0.54 0.44 0 0.61 0.98 0.69 0.07 0.54 0.85 0.16 0.02 0.63
0.27 0.5 0.52 0.98 0.34 0.91 0.87 0.4 0.78 0.66 0.8 0.88 0.18 0.33 0.85 0.1

Variant No./ Random values

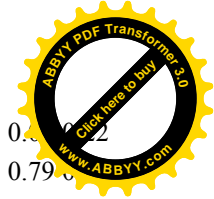
321 322 323 324 325 326 327 328 329 330 331 332 333 334 335 336
0.22 0.83 0.34 0.5 0.85 0.04 0.86 0.08 0.25 0.03 0.93 0.02 0.13 0.32 0.19 0.71
0.55 0.18 0.43 0.06 0.35 0.45 0.5 0.07 0.66 0.82 0.82 0.94 0.93 0.04 0.13 0.77
0.65 0.52 0.79 0.39 0.75 0.17 0.54 0.61 0.39 0.53 0.98 0.46 0.83 0.39 0.36 0.38
0.3 0.47 0.46 0.11 0.99 0.66 0.53 0.85 0.81 0.53 0.84 0.2 0.56 0.85 0.33 0.86
0.21 0.86 0.72 0.52 0.33 0.4 0.28 0.3 0.87 0.11 0.23 0.28 0.27 0.89 0.21 0.25
0.07 0.71 0.26 0.29 0.46 0.32 0.29 0.56 0.39 0.89 0.89 0.89 0.35 0.82 0.11 0.67
0.45 0.62 0.7 0.1 0.21 0.83 0.56 0.46 0.22 0.01 0.34 0.96 0.71 0.51 0.88 0.19
0.09 0.73 0.03 0.81 0.19 0.8 0.04 0.97 0.34 0.07 0.23 0.96 0.1 0.36 0.85 0.4
0.66 0.43 0.19 0.39 0.5 0.97 0.9 0.19 0.06 0.99 0.63 0.95 0.52 0.45 0.3 0.05
0.45 0.05 0.8 0.68 0.55 0.01 0.95 0.67 0.3 0.22 0.92 0.19 0.13 0.93 0.39 0.18

Variant No./ Random values

337 338 339 340 341 342 343 344 345 346 347 348 349 350 351 352
0.56 0.8 0.34 0.49 0.03 0.98 0.2 0.59 0.55 0.1 0.02 0.26 0.35 0.35 0.36 0.19
0.2 0.41 0.99 0.47 0.45 0.53 0.85 0.93 0.81 0.02 0.34 0.39 0.55 0.44 0.95 0.97
0.78 0.37 0.79 0.02 0.37 0.42 0.16 0.17 0.27 0.11 0.17 0.23 0.64 0.34 0.35 0.43
0.94 0.78 0.22 0.18 0.18 0.52 0.86 0.24 0.08 0.51 0.4 0.06 0.66 0.04 0.43 0.32
0.58 0.88 0.56 0.98 0.67 0.05 0.43 0.15 0.47 0.06 0.96 0.57 0.47 0.45 0.85 0.5
0.33 0.23 0.23 0.34 0.21 0.07 0.3 0.15 0.45 0.94 0.05 0.16 0.55 0.37 0.9 0.68
0.66 0.27 0.33 0.37 0.99 0.58 0.51 0.15 0.62 0.57 0.84 0.32 0.29 0.88 0.27 0.37
0.23 0.19 0.89 0.87 0.57 0.14 0.15 0.95 0.78 0.11 0.19 0.63 0.58 0.33 0 0.59
0.4 0.87 0.3 0.68 0.12 0.16 0.02 0.87 0.64 0.96 0.28 0.67 0.44 0.6 0.47 0.74
0.64 0.91 0.59 0.95 0.05 0.49 0.73 0.74 0.25 0.62 0.69 0.01 0.04 0.9 0.37 0.78

Variant No./ Random values

353 354 355 356 357 358 359 360 361 362 363 364 365 366 367 368
0.19 0.86 0.83 0.59 0.38 0.14 0.65 0.74 0.12 0.68 0.04 0.92 0.56 0.48 0.79 0.85
0.56 0.14 0.53 0.72 0.34 0.78 0.67 0.33 0.03 0.9 0.46 0.88 0.38 0.34 0.36 0.34
0.65 0.53 0.79 0.49 0.86 0.41 0.92 0.7 0.56 0.38 0.72 0.93 0.17 0.48 0.72 0.33
0.2 0.83 0.76 0.01 0.12 0.3 0.29 0.91 0.13 0.67 0.93 0.86 0.27 0.08 0.94 0.38



0.79 0.93 0.62 0.01 0.62 0.95 0.15 0.41 0.33 0.71 0.42 0.48 0.92 0.83 0.1
0.01 0.26 0.9 0.14 0.75 0.46 0.68 0.47 0.65 0.35 0.76 0.16 0.47 0.73 0.79
0.75 0.2 0.04 0.9 0.75 0.71 0.55 0.52 0.78 0.19 0.65 0.36 0.21 0.32 0.39 0.26
0.4 0.61 0.6 0.13 0.63 0.58 0.15 0.59 0.07 0.42 0.2 0.2 0.2 0.31 0.87 0.27
0.76 0.05 0.27 0.72 0.19 0 0.55 0.61 0.48 0.42 0.55 0.51 0.87 0.92 0.53 0.03
0.43 0.51 0.39 0.84 0.42 0.53 0.22 0.34 0.15 0.76 0.23 0.36 0.1 0.64 0.25 0.06

Variant No./ Random values

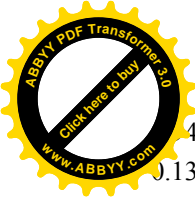
369 370 371 372 373 374 375 376 377 378 379 380 381 382 383 384
0.39 0.04 0.97 0.5 0.08 0.65 0.62 0.71 0.09 0.53 0.59 0.19 0.46 0.58 0.97 0.51
0.41 0.31 0.03 0.48 0.22 0.76 0.93 0.06 0.24 0.74 0.35 0.36 0.32 0.56 0.91 0.6
0.78 0.15 0.47 0.81 0.81 0.15 0.28 0.43 0.66 0.79 0.57 0.06 0.11 0.08 0.61 0.53
0.31 0.5 0.44 0.52 0.12 0.74 0.73 0.92 0.45 0.44 0.94 0.54 0.23 0.68 0.28 0.86
0.06 0.13 0.4 0.84 0.14 0.86 0.37 0.76 0.7 0.09 0.61 0.2 0.71 0.51 0.24 0.91
0.4 0.43 0.02 0.72 0.53 0.86 0.07 0.64 0.82 0.36 0.34 0.14 0.33 0.46 0.23 0.51
0.89 0.75 0.76 0.64 0.52 0.16 0.41 0.37 0.67 0.96 0.9 0.31 0.49 0.5 0.19 0.1
0.85 0.75 0.98 0.44 0.23 0.91 0.98 0.62 0.91 0.64 0.21 0.93 0.99 0.49 0.07 0.23
0.62 0.34 0.64 0.68 0.44 0.11 0.73 0.94 0.03 0.26 0.59 0.18 0.4 0.44 0.37 0.8
0.51 0.33 0.38 0.94 0.52 0.57 0.42 0.39 0.95 0.08 0.29 0.65 0.91 0.22 0.85 0.08

Variant No./ Random values

385 386 387 388 389 390 391 392 393 394 395 396 397 398 399 400
0.55 0.58 0.21 0.57 0.25 0.03 0.1 0.71 0.25 0.7 0.12 0.66 0.83 0.02 0.4 0.29
0.29 0.52 0.52 0.2 0.11 0.87 0.26 0.76 0.75 0.62 0.2 0.41 0.54 0.2 0.51 0.61
0.84 0.16 0.34 0.84 0.75 0.65 0.16 0.99 0.98 0.11 0.61 0.41 0.01 0 0.29 0.96
0.07 0.83 0.86 0.9 0.92 0.91 0.6 0.3 0.28 0.84 0 0.26 0.91 0.04 0.14 0.07
0.92 0.88 0.62 0.15 0.07 0.84 0.24 0.51 0.67 0.09 0.08 0.7 0 0.69 0.92 0.82
0.12 0.06 0.6 0.41 0.83 0.71 0.8 0.65 0.35 0.56 0.72 0.52 0.53 0.25 0.67 0.53
0.28 0.61 0.29 0.1 0.42 0.48 0.77 0.61 0.82 0.58 0.29 0.76 0.51 0.57 0.95 0.98
0.47 0.03 0.56 0.22 0.26 0.29 0.34 0.86 0 0.34 0.15 0.87 0.22 0.98 0.05 0.34
0.98 0.96 0.5 0.22 0.62 0.91 0.74 0.87 0.88 0.2 0.27 0.34 0.2 0.92 0.22 0.24
0.53 0.39 0.85 0.62 0.64 0.76 0.69 0.14 0.9 0.55 0.62 0.84 0.25 0.03 0.91 0.27

Variant No./ Random values

401 402 403 404 405 406 407 408 409 410 411 412 413 414 415 416
0.57 0.71 0.02 0.84 0.02 0.79 0.98 0.06 0.63 0.65 0.82 0.54 0.88 0.92 0.64 0.88
0.02 0.54 0.56 0.61 0.01 0.72 0.96 0.7 0.26 0.64 0.07 0.65 0.59 0.04 0.29 0.09



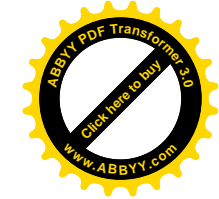
4 0.56 0.81 0.5 0.65 0.26 0.53 0.05 0.37 0.18 0.29 0.41 0.27 0.03 0.36 0.93
0.13 0.78 0.51 0.78 0.6 0.9 0.4 0.7 0.86 0.67 0.11 0.49 0.65 0.58 0.34 0.34
0.34 0.76 0.93 0.38 0.57 0.81 0.71 0.13 0.86 0.45 0.58 0.73 0.67 0.81 0.23 0.01
0.45 0.87 0.68 0.71 0.26 0.6 0.34 0.89 0.13 0.9 0.95 0.62 0 0.99 0.39 0.36
0.1 0.31 0.02 0.91 0.61 0.61 0.52 0.88 0.13 0.84 0.37 0.9 0.99 0.04 0.23 0.17
0.47 0.33 0.63 0.94 0.8 0.45 0.75 0.93 0.14 0.93 0.14 0.05 0.29 0.76 0.34 0.75
0.74 0.81 0.19 0.35 0.67 0.09 0.11 0.01 0.37 0.75 0.17 0.21 0 0.8 0.31 0.55
0.9 0.24 0.85 0.3 0.9 0.66 0.92 0.03 0.76 0.71 0.92 0.2 0.33 0.22 0.9 0.94

Variant No./ Random values

417 418 419 420 421 422 423 424 425 426 427 428 429 430 431 432
0.33 0.46 0.76 0.85 0.14 0.22 0.14 0.47 0.73 0.79 0.39 0.37 0.51 0.7 0.34 0.43
0.66 0.19 0.91 0.04 0.03 0.37 0.51 0.11 0.73 0.54 0.71 0.91 0.85 0.5 0.46 0.44
0.9 0.26 0.36 0.55 0.12 0.81 0.62 0.28 0.82 0.44 0.62 0.57 0.59 0.16 0.33 0.3
0.39 0.1 0.72 0.25 0.38 0.37 0.42 0.18 0.21 0.4 0.88 0.35 0.08 0.65 0.73 0.91
0.77 0.15 0.09 0.68 0.28 0.87 0.47 0.82 0.65 0.69 0.95 0.99 0.57 0.44 0.9 0.66
0.17 0.58 0.34 0.41 0.37 0.52 0.23 0.97 0.09 0.68 0.34 0.08 0 0.53 0.55 0.98
0.49 0.17 0.54 0.17 0.38 0.18 0.83 0.99 0.94 0.46 0.97 0.48 0.67 0.62 0.65 0.51
0.65 0.82 0.76 0.58 0.48 0.35 0.88 0.45 0.31 0.42 0.77 0.56 0.87 0.9 0.02 0.9
0.95 0.17 0.02 0.83 0.52 0.97 0.16 0.34 0.45 0.62 0.12 0.96 0.4 0.43 0.52 0.31
0.17 0.6 0.06 0.65 0.1 0.12 0.41 0.2 0.06 0.59 0.75 0.58 0.51 0.27 0.61 0.78

Variant No./ Random values

433 434 435 436 437 438 439 440 441 442 443 444 445 446 447 448
0.58 0.38 0.29 0.2 0.41 0.97 0.48 0.44 0.23 0.6 0.8 0.07 0.19 0.3 0.45 0.76
0.18 0.93 0.23 0.49 0.22 0.92 0.79 0.65 0.01 0.98 0.75 0.18 0.72 0.12 0.72 0.67
0.5 0.79 0.81 0.25 0.54 0.7 0.95 0.89 0.04 0.55 0.63 0.57 0.92 0.12 0.21 0.03
0.33 0.46 0.69 0.74 0.99 0.23 0.56 0.3 0.25 0.49 0.47 0.8 0.24 0.9 0.11 0.41
0.95 0.21 0.23 0.82 0.81 0.53 0.09 0.11 0.4 0.79 0.07 0.38 0.6 0.25 0.15 0.22
0.74 0.29 0.95 0.81 0.8 0.72 0.47 0.16 0.25 0.91 0.66 0.85 0.45 0.13 0.33 0.12
0.39 0.48 0.04 0.94 0.7 0.79 0.11 0.91 0.53 0.26 0.73 0.43 0.02 0.82 0.44 0.18
0.6 0.41 0.42 0.63 0.63 0.95 0.48 0 0.04 0.48 0 0.26 0.7 0.49 0.62 0.48
0.2 0.17 0.92 0.89 0.64 0.76 0.69 0.75 0.83 0.18 0.32 0.71 0.31 0.42 0.51 0.7
0.29 0.69 0.23 0.48 0.89 0.62 0.76 0.68 0.44 0.03 0.23 0.26 0.09 0.27 0.52 0.49



Чугай Олена Миколаївна

**ПОБУДОВА І ДОСЛІДЖЕННЯ
МАТЕМАТИЧНОЇ МОДЕЛІ
ЗАЛЕЖНОСТІ МАГНІТНОГО МОМЕНТУ
ЗЕМЛІ ВІД ШИРОТИ МЕТОДОМ
СТАТИСТИЧНИХ ВИПРОБУВАНЬ МОНТЕ
КАРЛО**
Апроксимація поліномом третього степеня

Модель ПГБ-10-214

Книга написана за матеріалами роботи наукової фізико-
математичної школи МЕНУ

**Науковий керівник – кандидат технічних наук,
доцент Літнарівч Руслан Миколайович**

*Комп'ютерний набір, верстка – дизайн у
редакторі Microsoft® Office 2003® Word*

О.М.Чугай

**МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
МІЖНАРОДНИЙ ЕКОНОМІКО-ГУМАНІТАРНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
Ім.акад. С.Дем'янчука**

**Кафедра Математичного моделювання
33027, м.Рівне, Україна
вул.акад. С.Дем'янчука, 4, корпус 1
Телефон: (+00380) 362 23-73-09
Факс: (+00380) 362 23-01-86
E-mail: mail@regi.rovno.ua**